

Н. Н. Л у з и н

И НТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В Ы С Ш А Я Ш К О Л А

1 9 6 1

Академик Н. Н. ЛУЗИН

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для вузов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1961

ГЛАВА I

ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ПРАВИЛА НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Интегрирование. Учащийся уже раньше познакомился с тем фактом, что математические действия встречаются попарно, образуя пары двух взаимнообратных действий. Такими парами, например, являются: сложение и вычитание $(+, -)$, умножение и деление $(\times, :)$, возвышение в целую положительную степень n и извлечение корня $[(\)^n, \sqrt[n]{\ }]$.

Далее, учащийся знает, что характеристики функций можно рассматривать тоже как действия и что эти действия также распределяются попарно: на *прямые* и *обратные*. Если заданная функция обозначается через $f(x)$, то, чтобы найти для характеристики f обратную характеристику φ , надо в равенстве $y = f(x)$ поменять местами буквы y и x , $x = f(y)$, и затем решить полученное уравнение относительно буквы y , $y = \varphi(x)$. Характеристика φ и будет обратной для f . Так, например, функции, написанные в одной колонне, обратны функциям, стоящим в другой колонне:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 1, & \pm \sqrt{x - 1}, \\ a^x, & \log_a x, \\ \sin x, & \arcsin x. \end{array}$$

При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что в то время как прямые действия почти всегда *однозначные*, действия обратные чаще всего суть действия *многозначные*. Это можно подметить и на функциях, стоящих в правой колонне, из которых первая $\pm \sqrt{x - 1}$ имеет сразу два значения, последняя $\arcsin x$ имеет одновременно даже *бесконечно много значений*.

Учащийся имел дело еще с другими парами функций:

$$f(x), \Phi(x),$$

из которых левая есть первообразная, правая же есть ее производная; это обстоятельство записывают в виде сопровождающего пару равенства

$$f'(x) = \Phi(x).$$

Дифференциальное исчисление имеет своей основной задачей следующую прямую задачу.

Из заданной первообразной $f(x)$ вывести ее производную $\Phi(x)$.
Эту задачу можно символически изобразить в виде:

$$f(x) \rightarrow \Phi(x).$$

Задачу эту дифференциальное исчисление решает при помощи своего основного действия: *дифференцирования* (нахождения производной).

Интегральное исчисление имеет своей основной задачей следующую **обратную** задачу.

По заданной производной $\Phi(x)$ отыскать ее первообразную $f(x)$.
Эту задачу символически можно изобразить в виде:

$$f(x) \leftarrow \Phi(x).$$

Задачу эту интегральное исчисление решает при помощи своего основного действия: *интегрирования*. *Интегрированием* называется действие отыскания первообразной для заданной производной функции $\Phi(x)$. Поэтому, в широком смысле:

действие интегрирования обратно действию дифференцирования.

В соответствии с этим названием действия отыскания первообразных, каждая отысканная первообразная $f(x)$ для данной производной $\Phi(x)$ называется *интегралом* (индивидуальным) *от функции* $\Phi(x)$.

§ 2. Многозначность действия интегрирования: прибавочное произвольное постоянное. Неопределенный интеграл. Дифференцирование есть действие *прямое* и *однозначное*, ибо непрерывная функция $f(x)$ не может иметь двух различных производных $\Phi(x)$. Интегрирование же есть действие *обратное* и, подобно большинству обратных действий, оно есть действие *многозначное*, дающее для заданной производной $\Phi(x)$ не один только результат $f(x)$, но бесчисленное множество их.

Для того чтобы убедиться в этом, вспомним сначала, что *производная постоянной равна нулю* и докажем основную лемму.

Лемма. Если непрерывная функция имеет всюду на каком-нибудь отрезке производную, равную нулю, тогда эта функция на рассматриваемом отрезке есть постоянная величина.

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть в каждой точке x этого отрезка имеем: $F'(x) = 0$. Если рассматриваемая функция $F(x)$ не есть постоянная величина на этом отрезке, тогда на нем имеются такие две точки x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, в которых численные значения $F(x_1)$ и $F(x_2)$ функции $F(x)$ заведомо не равны одна другой: $F(x_1) \neq F(x_2)$.

С другой стороны, применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему о среднем Лагранжа, мы имеем:

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot F'(\xi),$$

где ξ есть величина, промежуточная между x_1 и x_2 , $x_1 < \xi < x_2$. И так как ξ есть точка отрезка $[a, b]$, то мы должны иметь: $F'(\xi) = 0$. Отсюда предыдущее равенство дает: $F(x_2) - F(x_1) = 0$, что противоречит неравенству $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Отсюда заключаем, что $F(x)$ есть постоянная величина на отрезке $[a, b]$.

Теперь мы можем доказать предложения.

Прямая теорема. Если две функции отличаются одна от другой на постоянную величину, тогда они имеют ту же самую производную.

Доказательство. Ибо, если имеем $f^*(x) - f(x) = C$, где C есть постоянное и где функция $f(x)$ дифференцируема, то тогда $f^*(x) = f(x) + C$ и, следовательно, мы имеем:

$$\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Обратная теорема. Если две функции имеют ту же самую производную, их разность есть постоянная величина.

Доказательство. Ибо, если имеем $\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$, то тогда

$$\frac{d[f^*(x) - f(x)]}{dx} = \frac{df^*(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} = 0,$$

и, следовательно, по доказанной основной лемме, мы имеем:

$$f^*(x) - f(x) = C,$$

где C — постоянная величина.

Из доказанных предложений сразу же вытекает *многозначность действия интегрирования*.

Ибо, если для заданной производной $\Phi(x)$ нам удалось отыскать какую-нибудь индивидуальную ее первообразную $f(x)$, то тогда:

во-первых, всякое выражение $f(x) + C$, где C есть любое выбранное постоянное, окажется также первообразной для рассматриваемой производной $\Phi(x)$, потому что функции $f(x)$ и $f(x) + C$ отличаются на постоянную величину (прямая теорема);

во-вторых, каждая без исключения первообразная $f^*(x)$, какой бы она ни была для производной $\Phi(x)$, выразится в виде $f(x) + C$, где C есть постоянное, потому что обе первообразные функции $f^*(x)$ и $f(x)$ имеют ту же самую производную $\Phi(x)$, и значит, имеем $f^*(x) - f(x) = C$, где C , постоянное (обратная теорема). Следовательно, $f^*(x) = f(x) + C$.

Таким образом:

если $f(x)$ есть какая-нибудь индивидуальная первообразная для заданной производной $\Phi(x)$, то совокупность всех первообразных для $\Phi(x)$ заключена в выражении $f(x) + C$, где C есть произвольное постоянное.

Выше мы назвали какую-нибудь найденную первообразную $f(x)$ для заданной производной $\Phi(x)$ *интегралом* (индивидуальным) *от функции* $\Phi(x)$.

Общее же выражение $f(x) + C$, где C — произвольное постоянное, носит название *неопределенного интеграла от функции* $\Phi(x)$. Первое слагаемое $f(x)$ этого выражения называется *функциональной частью неопределенного интеграла*. Второе слагаемое C называется *постоянным интегрирования*. Это число не зависит от переменного x , называемого *переменным интегрирования*, и его величина может быть выбрана по желанию; поэтому его называют *прибавочным произвольным постоянным*, или *произвольным постоянным неопределенного интеграла*.

Пример. Так как $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$, то функция $\frac{x^4}{4}$ является первообразной для x^3 . Поэтому $\frac{x^4}{4}$ есть *индивидуальный интеграл* от x^3 . Такими же индивидуальными интегралами от x^3 будут, например, функции $\frac{x^4}{4} + 2$, $\frac{x^4}{4} - 7$ и так далее. Выражение же $\frac{x^4}{4} + C$, где C есть произвольное постоянное, есть *неопределенный интеграл от x^3* . Первое слагаемое $\frac{x^4}{4}$ есть *функциональная часть неопределенного интеграла от x^3* . Второе слагаемое C есть *постоянное интегрирования*; численную величину его можно брать какой угодно.

Произволом постоянного интегрирования пользуются для того, чтобы из всех первообразных для данной производной $\Phi(x)$ отыскать ту, которая имеет какие-нибудь наперед предписанные свойства.

Например, в целях практики часто требуется решить задачу:

выбрать численное значение постоянного интегрирования так, чтобы получить первообразную, имеющую в заданной заранее точке x_0 наперед предписанное численное значение y_0 .

Решение. Пусть $\Phi(x)$ — данная производная функция и $f(x) + C$ — неопределенный интеграл от $\Phi(x)$. Постоянное интегрирования C нужно выбрать таким, чтобы первообразная $f(x) + C$ для $x = x_0$ была равна y_0 . Значит, мы должны иметь $f(x_0) + C = y_0$. Определяя из этого уравнения величину C , мы находим $C = -f(x_0) + y_0$. Отсюда искомая первообразная будет:

$$f(x) - f(x_0) + y_0.$$

Пример. Найти первообразную для x^3 , имеющую в точке $x = 2$ величину 17.

Решение. Неопределенный интеграл от x^3 пишется в виде $\frac{x^4}{4} + C$. Требуется выбрать C так, чтобы получилась первообразная $\frac{x^4}{4} + C$, имеющая

при $x=2$ величину 17. Это означает, что мы должны иметь равенство:

$$\frac{2^4}{4} + C = 17, \quad \text{или} \quad 4 + C = 17.$$

Отсюда $C = 13$. Первообразная $\frac{x^4}{4} + 13$ в самом деле имеет величину 17, когда $x = 2$.

Учащийся должен обратить внимание на то, что решение задачи есть решение *единственное и вполне определенное*, так как среди всех первообразных $f^*(x)$ для функции $\Phi(x)$ имеется *одна и только одна* первообразная $f(x) + C$, принимающая значение y_0 в точке x_0 . Ибо, решая эту задачу, мы получили только одно значение для постоянного C , $C = -f(x_0) + y_0$, дающее эту первообразную.

§ 3. Определенный интеграл. Хотя у всякой данной производной $\Phi(x)$ имеется бесчисленное множество первообразных, однако все они обладают следующим общим свойством:

приращения, получаемые первообразными в концах какого-нибудь данного отрезка $[a, b]$, все равны друг другу.

Доказательство. В самом деле, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две какие-нибудь первообразные для $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$, их разность $f_2(x) - f_1(x)$ есть величина *постоянная* на этом отрезке. Значит, имеем на $[a, b]$ равенство $f_2(x) - f_1(x) = C$, где C — постоянное. Отсюда находим: $f_2(x) = f_1(x) + C$. Следовательно, имеем: $f_2(b) = f_1(b) + C$ и $f_2(a) = f_1(a) + C$. Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$f_2(b) - f_2(a) = f_1(b) - f_1(a).$$

Значит, *приращения, испытываемые первообразными для заданной $\Phi(x)$ при переходе их аргумента x от значения a к значению b , все равны друг другу, ч. т. д.*

Как важное следствие мы заключаем, что:

приращение $f(b) - f(a)$ первообразной есть величина, от нее не зависящая, но обусловленная только самой природой производной с $\Phi(x)$, да еще числами a и b .

По этой причине приращение $f(b) - f(a)$ обозначают просто через I_a^b , не указывая первообразной $f(x)$, от каковой это приращение совсем не зависит, и называют **определенным интегралом от функции $\Phi(x)$ между пределами a и b** , причем число a пишется внизу и называется **нижним пределом**, а число b пишется сверху и называется **верхним пределом**.

Не забудем, что при этом предполагается *непрерывность данной функции $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$* ; следовательно, ее течение на этом отрезке не имеет никаких особенностей в виде разрывов, уходов в бесконечность и т. д.

Пример. Вычислить определенный интеграл от функции x^3 между пределами 1 и 5.

Решение. Неопределенный интеграл от функции x^3 есть $\frac{x^4}{4} + C$. Возьмем *какую-нибудь* первообразную от x^3 , например $\frac{x^4}{4}$. Имеем: $I_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = \frac{624}{4} = 156$. Следовательно, определенный интеграл I_1^5 от функции x^3 равен 156.

Когда производная $\Phi(x)$ нам дана на каком-нибудь отрезке $[A, B]$, на котором она непрерывна, и когда a и b — две какие-нибудь данные точки этого отрезка, тогда определенный интеграл I_a^b есть просто **число**. Но если нижний предел a есть величина постоянная, а верхний предел b есть величина *переменная*, не выходящая за отрезок $[A, B]$, тогда определенный интеграл I_a^b становится **функцией своего верхнего предела** b и тогда важно знать свойства этой функции. С этой целью обозначим через x верхний предел b определенного интеграла I_a^b , положив $b = x$, и рассмотрим определенный интеграл I_a^x с переменным верхним пределом x .

Так как по самому смыслу определенного интеграла I_a^b мы имеем равенство:

$$I_a^b = f(b) - f(a),$$

где $f(x)$ есть какая-нибудь первообразная для $\Phi(x)$, выбранная произвольно, то, делая в этом равенстве $b = x$, мы находим:

$$I_a^x = f(x) - f(a).$$

Поэтому, беря производную по x от обеих частей этого равенства, мы получаем:

$$\frac{dI_a^x}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{df(a)}{dx} = \Phi(x) - 0 = \Phi(x).$$

Таким образом, *определенный интеграл I_a^x с переменным верхним пределом x есть первообразная функция для $\Phi(x)$. Эта первообразная равна нулю при $x = a$, ибо*

$$I_a^a = f(a) - f(a) = 0.$$

Отсюда, на основании предыдущего, заключаем, что определенный интеграл I_a^x есть та *единственная* первообразная для $\Phi(x)$, которая уничтожается в точке a .

Выражение же

$$I_a^x + C,$$

где C есть произвольное постоянное, является, очевидно, *неопределенным интегралом от функции $\Phi(x)$* , ибо, при изменении C , дает *все* первообразные для $\Phi(x)$.

Когда C задано, выражение $I_a^x + C$ дает первообразную, равную C в точке $x = a$.

§ 4. Основная теорема интегрального исчисления о вычислении определенного интеграла. В предыдущем параграфе мы видели, что определенный интеграл I_a^b от функции $\Phi(x)$ между пределами a и b , будучи равен приращению $f(b) - f(a)$ любой первообразной $f(x)$ для $\Phi(x)$, от первообразных в действительности несколько не зависит, но зависит только от самой производной функции $\Phi(x)$, да еще от пределов a и b . Однако эта зависимость определенного интеграла I_a^b от функции $\Phi(x)$ и чисел a и b является зависимостью очень темной, и интегральное исчисление поэтому начинается с указания того действия, которое нужно выполнить прямо над отрезком $[a, b]$ и непрерывной на нем функцией $\Phi(x)$, чтобы иметь определенный интеграл

$$I_a^b = f(b) - f(a). \quad (1)$$

На первый взгляд кажется, что получить определенный интеграл I_a^b таким *прямым образом* через отрезок $[a, b]$ и функцию $\Phi(x)$ очень легко, так как для этого достаточно лишь применить *теорему о среднем* Лагранжа (часть I, § 144), написав равенство

$$f(b) - f(a) = (b - a) \Phi(\xi), \quad (2)$$

где ξ обозначает величину, промежуточную между a и b (рис. 1).

Но, чтобы правая часть равенства (2) стала известной, нам нужно знать точное местонахождение средней величины ξ . А теорема



Рис. 1

о среднем не дает никаких указаний на этот счет, она только говорит нам о том, что ξ лежит на отрезке $[a, b]$ где-то между его концами.

Для того чтобы смягчить эту неопределенность местонахождения точки ξ на отрезке $[a, b]$, разбивают этот отрезок на n мелких отрезков и применяют к каждому из них теорему о среднем. Делается это следующим образом.

Сначала наносят на отрезке $[a, b]$ точки деления: они берутся заранее нам известными и всего их будет $n - 1$. Их обозначают по порядку, двигаясь от a к b , через $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$. Для однообразия рассуждений начальную точку a обозначают через x_0 и конечную точку b через x_n .

Сообразно этому, самый левый отрезок $[a, x_1]$ называют начальным, или *нулевым*; следующий отрезок $[x_1, x_2]$ — *первым*, следующий

за ним $[x_2, x_3]$ — *вторым* и т. д. Вообще, отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ называют i -м. И, наконец, последний отрезок $[x_{n-1}, b]$ называют $n-1$ -м (рис. 2).



Рис. 2

Если при пробеге отрезка $[a, b]$ от точки a к точке b рассматривать абсциссу x_i как *старую*, а абсциссу x_{i+1} как *новую*, тогда разность $x_{i+1} - x_i$ нужно назвать приращением абсциссы x_i и нужно ее обозначить через Δx_i , т. е. написать равенство

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad (3)$$

где i может явиться любым числом из ряда $0, 1, 2, \dots, n-1$. С другой стороны, разность $x_{i+1} - x_i$, очевидно, равна *длине отрезка* $[x_i, x_{i+1}]$. Таким образом, Δx_0 есть длина нулевого отрезка, Δx_1 есть длина первого отрезка, Δx_2 есть длина второго отрезка и т. д. до последнего отрезка, длина которого есть Δx_{n-1} .

Теперь теорема о среднем дает равенства:
для нулевого отрезка:

$$f(x_1) - f(a) = (x_1 - a) \Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_0) \cdot \Delta x_0,$$

для первого отрезка:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_1) \cdot \Delta x_1,$$

для второго отрезка:

$$f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2) \Phi(\xi_2) = \Phi(\xi_2) \cdot \Delta x_2,$$

.....

для i -го отрезка:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) \Phi(\xi_i) = \Phi(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

.....

для $n-1$ -го отрезка:

$$f(b) - f(x_{n-1}) = (b - x_{n-1}) \Phi(\xi_{n-1}) = \Phi(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1},$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$ суть *нам неизвестные точки*, находящиеся соответственно на нулевом, первом, втором, ..., i -м, ..., $n-1$ -м отрезках.

Складывая написанные равенства, мы получаем:

$$f(b) - f(a) = \Phi(\xi_0) \Delta x_0 + \Phi(\xi_1) \Delta x_1 + \Phi(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + \Phi(\xi_i) \Delta x_i + \dots + \Phi(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}. \quad (4)$$

Учащийся должен иметь в виду, что хотя равенство это и есть совершенно *точное*, однако для окончательной нашей цели вычисления неизвестной величины $f(b) - f(a)$ оно *совсем не пригодно*, ибо мы не знаем местонахождения средних величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$ на соответствующих отрезках. Эти средние величины пишутся лишь на основании теоремы о среднем.

Если теперь вместо этих неизвестных нам точек $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$ мы возьмем какие-нибудь другие точки $\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_i^*, \dots, \xi_{n-1}^*$, также по одной лежащие на указанных отрезках, то тогда уже нет никаких оснований ожидать, чтобы аналогичная сумма

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \Phi(\xi_2^*)\Delta x_2 + \dots + \Phi(\xi_i^*)\Delta x_i + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \quad (5)$$

оказалась в *точности* равной $f(b) - f(a)$. Зато мы можем вычислить, насколько может эта новая сумма *уклоняться* от $f(b) - f(a)$.

Действительно, составляя разность

$$[f(b) - f(a)] - [\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_i^*)\Delta x_i + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}], \quad (6)$$

мы видим, что она получается вычитанием суммы (5) из обеих частей равенства (4) и, значит, равна выражению:

$$[\Phi(\xi_0) - \Phi(\xi_0^*)]\Delta x_0 + \dots + [\Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_i^*)]\Delta x_i + \dots + [\Phi(\xi_{n-1}) - \Phi(\xi_{n-1}^*)]\Delta x_{n-1}. \quad (7)$$

Для того чтобы оценить это выражение, обратим внимание на то, что *обе точки ξ_i и ξ_i^* находятся на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$* . Функция же $\Phi(x)$ предполагается *непрерывной на отрезке $[a, b]$* . Это означает, что для всякого сколь угодно малого положительного ε имеется такое положительное число η , что обязано быть справедливым неравенство

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| < \varepsilon \quad (I)$$

всякий раз, как будет удовлетворено неравенство

$$|x'' - x'| < \eta. \quad (II)$$

Отсюда следует, что если наибольший из отрезков $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ меньше по своей длине чем η , то тогда мы будем иметь для *всех* величин i неравенство

$$|\xi_i - \xi_i^*| < \eta. \quad (II^*)$$

и поэтому обязательно будет справедливо неравенство

$$|\Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_i^*)| < \varepsilon \quad (I^*)$$

для *всех* величин i .

А из неравенства (I*) следует, что абсолютная величина выражения (7) не может превосходить сумму

$$\varepsilon \Delta x_0 + \varepsilon \Delta x_1 + \dots + \varepsilon \Delta x_i + \dots + \varepsilon \Delta x_{n-1},$$

равную, очевидно, количеству $\varepsilon(b-a)$. Так как таковое делается бесконечно малым, когда ε имеет пределом нуль, то это указывает на то, что разность (6) есть обязательно *величина бесконечно малая*. А отсюда следует, что $f(b) - f(a)$ есть *предел суммы* (5).

Таким образом, мы пришли к важнейшему предположению.

Основная теорема интегрального исчисления. Пусть $\Phi(x)$ функция, непрерывная на данном отрезке $[a, b]$, имеющая первообразную $f(x)$. Разделим этот отрезок на n мелких отрезков, длины которых суть $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$, и выберем соответственно в каждом из них по одной какой-нибудь точке: $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*$. Тогда разность $f(b) - f(a)$ есть предел суммы

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}, \quad (5)$$

когда число n этих отрезков возрастает безгранично в то время, как длина всякого из них стремится к нулю.

Из доказанной основной теоремы интегрального исчисления вытекает следующее общее правило нахождения определенных интегралов.

Чтобы найти определенный интеграл I_a^b от заданной нам непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $\Phi(x)$, нужно выполнить следующие шаги.

Первый шаг. Разделить отрезок $[a, b]$ на n отрезков, длины которых (считая по порядку от точки a к точке b) суть $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$.

Второй шаг. В каждом из этих отрезков выбрать произвольным образом по одной точке: $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*$.

Третий шаг. Для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ составить парное произведение $\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i$ величины $\Phi(\xi_i^*)$ данной функции $\Phi(x)$ в выбранной точке ξ_i^* на длину Δx_i этого отрезка и все получившиеся n парных произведений сложить:

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}. \quad (5)$$

Четвертый шаг. Найти предел составленной таким образом суммы n парных произведений, когда n безгранично увеличивается и когда наибольшая из длин Δx_i стремится к нулю как к пределу. Это и будет искомым определенным интегралом $I_a^b = f(b) - f(a)$.

§ 5. Характер основного действия интегрального исчисления. Обозначения определенного и неопределенного интегралов.

Мы знаем, что общее правило дифференцирования (см. часть I, § 55) разбивается на *четыре шага*, причем три первые шага имеют в виду лишь составить выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при *конечном* Δx , и только четвертый шаг есть завершающий, ибо в нем предлагается отыскать **предел** составленного выражения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx приближается к нулю как к пределу.

Однако при этом не делается никаких указаний на то, каким образом *на деле*, т. е. *в действительности*, мы должны искать этот предел. Это отсутствие указаний вполне понятно, потому что в общем случае их и невозможно сделать. Поэтому-то в дальнейшем изложении дифференциального исчисления единое общее правило дифференцирования заменяется системой 20 правил, указанных в двух таблицах, данных в § 57 и в § 90 части I. Эти 20 правил являются системой гораздо более узкой, чем общее правило дифференцирования, и не дают возможности дифференцировать *любую* функцию $f(x)$, имеющую производную, но зато они охватывают многие и многие практически встречающиеся случаи и, что важнее всего, всякий раз *доводят дифференцирование до самого конца*, тогда как *четвертый шаг* общего правила дифференцирования не способен этого сделать и является, в сущности, *действием неоперабельным*, т. е. вычислением невычислимым.

Аналогично обстоит дело и в интегральном исчислении. Его основным действием является нахождение определенных интегралов, и это действие также разбивается на *четыре шага*, из которых три первые шага имеют в виду составление суммы $\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$, а в четвертом завершающем шаге предлагается отыскать **предел** этой суммы, когда все Δx_i стремятся к нулю.

Таким образом, в то время как дифференциальное исчисление ищет *пределы отношения двух бесконечно малых*, в это самое время интегральное исчисление ищет *пределы сумм неограниченно возрастающего числа бесконечно малых слагаемых*. И отыскивание пределов таких сумм еще в большей степени является действием неоперабельным и вычислением невычислимым. Но так как при изучении природы (в физике, химии), в механике и геометрии очень часто приходится искать пределы таких сумм, то *интегральное исчисление предприняло обходной путь*: формальным, часто алгебраическим путем оно прямо разыскивает первообразные $f(x)$ для данных производных $\Phi(x)$, а после отыскания первообразной составление разности $f(b) - f(a)$ сразу дает точную величину

определенного интеграла I_a^b , являющегося, как мы сказали, пределом ценных для естествознания сумм бесконечно малых.

Такая алгебраическая сторона интегрального исчисления делается возможной лишь по установлении *целесообразного обозначения для определенного и неопределенного интегралов*.

Для этого, прежде всего, сумму

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_l^*)\Delta x_l + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}, \quad (5)$$

вообще очень длинную, пишут сокращенно в виде:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \Phi(\xi_i^*)\Delta x_i,$$

выписывая сначала латинскую букву S , как знак действия суммирования (сумма = summa), и под знаком суммы S выписывая так называемый «*общий член*» суммы, т. е. такое ее i -е слагаемое, которое становится и начальным (нулевым) слагаемым, и первым, и вторым, и, наконец, последним, $n-1$ -м, когда дадут i значения $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Затем, вспоминая, что ξ_i^* есть какая-нибудь выбранная точка на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, принимают за ξ_i^* его *левый конец*, т. е. полагают $\xi_i^* = x_i$. Тогда сумма (5) получает вид:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \Phi(x_i)\Delta x_i.$$

Далее, вместо указания внизу и сверху знака суммы S пределов знака i , просто ставят указания на начальное значение x_i , т. е. букву a , и на последнее значение x_i , т. е. букву b ¹. После указанного изменения сумма (5) напишется в виде:

$$\sum_a^b \Phi(x_i)\Delta x_i.$$

Потом просто опускают ставший ненужным значок i у абсциссы, в силу чего сумма (5) приобретает вид:

$$\sum_a^b \Phi(x)\Delta x.$$

¹ Строго говоря, последним значением абсциссы x_i является не b , но x_{n-1} . Но оно бесконечно мало отличается от b и, притом, прибавление к сумме бесконечно малого слагаемого $\Phi(b)\Delta b$, разумеется, не изменит предела этой суммы.

И, наконец, вспоминая, что приращение Δx независимого переменного x и его дифференциал dx являются одним и тем же, ибо имеем $\Delta x = dx$, сумме (5) дают окончательный вид:

$$\sum_a^b \Phi(x) dx. \quad (5^*)$$

Но учащийся должен твердо помнить, что в формуле (5*) речь идет о *настоящей* сумме, состоящей из **конечного** числа слагаемых. Об этом говорит поставленная впереди буква S (summa). Глядя на формулу (5*), учащийся легко может уже не сокращенно, но полностью выписать всю эту сумму: для этого он должен разделить отрезок $[a, b]$ на конечное число отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ и умножить величину данной непрерывной функции $\Phi(x)$, вычисленную в левом конце x_i каждого отрезка, на его длину $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Все полученные таким образом парные произведения $\Phi(x_i)\Delta x_i$ он должен сложить. Это и будет полностью развитой суммой (5), сокращенное изображение которой написано в виде формулы (5*).

Найдено было целесообразным дать такое обозначение **пределу** суммы (5*), которое носило бы на себе отпечаток происхождения этого предела, т. е. следы суммы (5*). Для этого оставляют внешний вид суммы (5*) тем же самым, только вместо буквы S , обозначающей настоящую сумму конечного числа слагаемых, пишут знак \int , представляющий собой сильно вытянутую букву S .

Таким образом, определенный интеграл I_a^b пишут в виде:

$$\int_a^b \Phi(x) dx \quad (8)$$

и произносят: *«определенный интеграл от a до b эф икс дэ икс»*.

Учащийся должен быть предупрежден, что формула (8) не обозначает никакой суммы; она отнюдь не есть какая-нибудь «сумма», хотя бы и бесконечно малых, но есть лишь **предел** такой суммы. Смешивать же сумму (настоящую) с пределом суммы нельзя.

Таким образом, мы имеем право писать только

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \lim \sum_a^b \Phi(x) dx, \quad (9)$$

или, в развитом виде:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \lim [\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}]. \quad (10)$$

Так как, с другой стороны, определенный интеграл I_a^b равен разности значений $f(b) - f(a)$ какой-нибудь первообразной $f(x)$ для

$\Phi(x)$, то мы приходим к основной формуле интегрального исчисления:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a), \quad (11)$$

где $\Phi(x) = f'(x)$.

Соответствующее практическое правило вычисления определенных интегралов таково:

для фактического вычисления определенного интеграла $\int_a^b \Phi(x) dx$

не нужно производить никакого перехода к пределу, а нужно выполнить следующие два шага.

Первый шаг. *Постараться отыскать для заданной непрерывной функции $\Phi(x)$ какую-нибудь ее первообразную $f(x)$. Эти поиски, вообще, не требуют никакого перехода к пределу, так как ведутся формальным способом или даже чисто алгебраически.*

Второй шаг. *Найдя первообразную $f(x)$ для $\Phi(x)$, составить разность $f(b) - f(a)$.*

Эта разность $f(b) - f(a)$ и будет тем пределом суммы $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$, для разыскания которого у нас, вообще, нет никаких других средств.

По поводу самого обозначения $\int_a^b \Phi(x) dx$ определенного интеграла следует заметить, что числа a и b , носящие соответственно названия: *нижний предел интеграла и верхний предел интеграла*, на самом деле никакими «пределами» не являются, будучи просто границами изменения переменного x . Самое это переменное x также, собственно, не является настоящим переменным, будучи в действительности лишь *кажущимся переменным*. Его иногда так и называют, но чаще всего применяют название «*переменное интегрирования*». Переменное интегрирования не есть настоящее переменное и имеет лишь служебное назначение. Так, когда мы берем сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, то, вместо того, чтобы ее выписывать полностью

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050,$$

мы можем написать ее сокращенно, указав «общий член» под знаком суммы

$$\sum_{i=1}^{i=100} i = 5050.$$

Здесь i есть кажущееся переменное, а не настоящее, ибо окончательный результат 5050 от i не зависит. Поэтому это кажущееся переменное, являющееся лишь *переменным суммирования*, т. е. развертывания, один за другим, слагаемых членов, можно обозначить и какой-нибудь другой буквой, например, j или k , ибо результат 5050 будет тот же самый:

$$\sum_{j=1}^{j=100} j = 5050, \quad \sum_{k=1}^{k=100} k = 5050.$$

Точно так же и допредельную сумму $\sum_a^b \Phi(x) dx$ можно написать без изменения ее величины, в виде $\sum_a^b \Phi(t) dt$ или $\sum_a^b \Phi(v) dv$.

Поэтому и определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ имеет ту же величину, как и определенные интегралы

$$\int_a^b \Phi(t) dt \quad \text{или} \quad \int_a^b \Phi(v) dv.$$

Основной отрезок $[a, b]$ называется *областью определенного интегрирования*, или, чаще всего (но менее правильно), *интервалом интегрирования*.

Самое действие отыскания величины определенного интеграла $\int_a^b \Phi(x) dx$ посредством перехода к пределу суммы $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ называется *интегрированием*. Поэтому слово «интегрирование» имеет двойное значение: во-первых, оно обозначает *отыскание первообразной* $f(x)$ по ее производной $\Phi(x)$ или по ее дифференциалу $\Phi(x) dx$; во-вторых, оно обозначает отыскание прямым образом предела $\int_a^b \Phi(x) dx$ вышеуказанной суммы $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$, т. е. *самое действие перехода к пределу*. Чтобы различить друг от друга эти два смысла слова «интегрирование», первое интегрирование называют «*неопределенным интегрированием*», второе интегрирование называют «*определенным интегрированием*».

Оба рода интегрирования теснейшим образом связаны между собой.

С одной стороны, знание неопределенного интеграла $f(x) + C$ от производной $\Phi(x)$ тотчас же дает возможность вычислить определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ для любых пределов a и b , так как имеем:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a).$$

С другой стороны, умение вычислить определенный интеграл $\int_a^x \Phi(t) dt$ с переменным верхним пределом для функции Φ тотчас же дает знание неопределенного интеграла $f(x) + C$ от функции $\Phi(x)$, так как еще в § 3 мы видели, что выражение $I_a^x + C$, при C произвольном постоянном, является неопределенным интегралом от функции $\Phi(x)$. И так как мы имеем равенство $I_a^x = \int_a^x \Phi(t) dt$, то неопределенный интеграл от функции $\Phi(x)$ напишется в виде¹:

$$\int_a^x \Phi(t) dt + C.$$

Ввиду столь тесной связи обоих интегрирований, *условились обозначать неопределенный интеграл от данной непрерывной функции $\Phi(x)$ символом*

$$\int \Phi(x) dx,$$

не указывая пределов интегрирования и не указывая добавочного произвольного постоянного C . Это постоянное интегрирования C подразумевается всегда уже включенным в знак $\int \Phi(x) dx$ неопределенного интеграла, так что учащийся должен научиться видеть в символе $\int \Phi(x) dx$ не одну какую-нибудь первообразную для $\Phi(x)$, а сразу всю бесконечную совокупность их. Таким образом,

¹ Писать $\int_a^x \Phi(x) dx$ нельзя, ибо не следует одной и той же буквой x обозначать и кажущееся переменное (x внизу) и истинное переменное (x сверху).

прибавочное произвольное постоянное C всегда должно сопровождать найденный окончательно неопределенный интеграл $\int \Phi(x) dx$, хотя в символе оно явным образом и не выписано. Например:

а) если $\Phi(x) = x^3$, то следует писать $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, а не только одну функциональную часть неопределенного интеграла $\frac{x^4}{4}$;

б) если $\Phi(x) = \cos x$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$, следовательно, не надо забывать прибавить C в окончательном результате;

с) если $\Phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, то $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

§ 6. Взаимная обратность знаков дифференциала d и неопределенного интеграла \int . Мы знаем из предыдущего параграфа, что неопределенное интегрирование есть действие отыскания первообразных $f(x) + C$ по данному дифференциалу $\Phi(x) dx$, так что имеем:

$$\int \Phi(x) dx = f(x) + C, \quad (1)$$

причем

$$df(x) = \Phi(x) dx, \quad (2)$$

ибо $f'(x) = \Phi(x)$.

Дифференцируя обе части равенства (2), мы имеем:

$$d \int \Phi(x) dx = d[f(x) + C] = df(x) = \Phi(x) dx,$$

т. е. окончательно

$$d \int \Phi(x) dx = \Phi(x) dx. \quad (3)$$

С другой стороны, заменяя в левой части равенства (1) дифференциальное выражение $\Phi(x) dx$ по формуле (2) через $df(x)$, мы находим:

$$\int df(x) = f(x) + C. \quad (4)$$

Полученные равенства (3) и (4) очень ясно показывают, что действие дифференцирования d и действие неопределенного интегрирования \int суть действия *взаимнообратные*. В самом деле, равенство (3) говорит нам о том, что два взаимнопротивоположные знака d и \int , будучи поставлены рядом (в комбинации $d \int$, где сначала стоит d и уже за ним \int), уничтожают друг друга, так что мы можем их просто зачеркнуть в левой части равенства (3) и тогда

получится правая его часть. Равенство же (4) говорит нам, что и в комбинации $\int d$ (где сначала стоит \int и уже за ним d) оба знака тоже взаимно уничтожают друг друга, так что их можно просто зачеркнуть в левой части равенства (4) и тогда получится правая его часть, но *без прибавленной постоянной интегрирования C* . Это прибавление нужно не забыть сделать, так как неопределенное интегрирование есть действие *многозначное*, всегда дающее прибавочное произвольное постоянное C .

Деля равенство (3) на dx , мы получим:

$$\frac{d}{dx} \int \Phi(x) dx = \Phi(x). \quad (3^*)$$

С другой стороны, вспомнив, что $df(x) = f'(x) dx$, мы можем равенство (4) переписать в виде

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad (4^*)$$

что равносильно равенству

$$\int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) + C. \quad (4^{**})$$

Мы видим, что знаки производной $\frac{d}{dx}$ и неопределенного интеграла \int не вполне противоположны, так как не могут без остатка уничтожать один другого, ибо этому препятствует dx . Таким образом, истинно-противоположными оказываются только знаки *дифференциала d* и интеграла \int , а не производной $\frac{d}{dx}$ и интеграла \int .

Поэтому основной задачей дифференциального исчисления является осуществление *спуска* от данной первообразной $f(x)$ к ее *дифференциалу* $\Phi(x) dx$; основной же задачей интегрального исчисления является осуществление *подъема* от *данного дифференциала* $\Phi(x) dx$ к его первообразной $f(x) + C$. Схематически это изобразится в виде:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & f(x) + C \\ \downarrow & & \uparrow \\ \Phi(x) dx & & \Phi(x) dx. \end{array}$$

Как всякое обратное действие, интегрирование труднее дифференцирования. Притом, продифференцировать можно каждую функцию $f(x)$, которая пишется в *конечном* виде через элементарные функции, комбинируя их правилом «функция от функции». Проинтегрировать же можно далеко не каждую функцию $\Phi(x)$, даже если она и пишется очень просто.

З а м е ч а н и е. На символ $\int \Phi(x) dx$ неопределенного интеграла учащийся должен смотреть как на знак, выражающий *любую* первообразную для $\Phi(x)$, подобно тому как в алгебре буквы a, b, \dots обозначают *любые* числа. Сообразно этому C обозначает *произвольную постоянную*, и употребление ее столь своеобразно, что наверное будет вызывать у учащегося первое время некоторое недоумение; например, мы, складывая $C + C$, будем всегда писать в результате не $2C$, а просто C , потому что, если C есть *произвольная постоянная*, то и $2C$ есть тоже *произвольная постоянная*, и, значит, ее можно обозначать просто через C .

Сумма скольких угодно произвольных постоянных и каких угодно численных постоянных пишется в виде *только одной* произвольной постоянной C .

Учащийся, делая выкладки с неопределенными интегралами $\int \Phi(x) dx$, всегда должен, имея в виду равенство (1), представлять произвольную постоянную C *входящей в состав неопределенного интеграла*.

§ 7. О вычисляемости и невычисляемости неопределенных интегралов. Учащийся уже знает, что одной из важных задач интегрального исчисления является: *для заданной производной $\Phi(x)$ отыскать ее первообразную $f(x)$* .

Здесь учащийся вправе спросить:

Всегда ли имеется первообразная у заданной функции $\Phi(x)$? Учащийся должен быть заранее предупрежден, что у *всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $\Phi(x)$ действительно имеется первообразная $f(x)$* .

Это значит, что:

всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\Phi(x)$ может быть рассматриваема как производная от некоторой другой непрерывной функции $f(x)$, т. е. $f'(x) = \Phi(x)$.

Эта важная теорема математического анализа не допускает никаких исключений: безусловно у *всякой непрерывной $\Phi(x)$ имеется первообразная $f(x)$* . Совсем иной вопрос:

как отыскать для заданной непрерывной функции $\Phi(x)$ ее первообразную $f(x)$?

Этот вопрос уже совсем иной природы, потому что математический анализ, утверждая, что у *всякой непрерывной $\Phi(x)$ имеется первообразная $f(x)$* , вовсе не собираются утверждать, что ее можно фактически (т. е. конечным образом) отыскать. И учащийся должен быть предупрежден об истинности этой важной теоремы математического анализа, совсем независимо от того, умеет ли он отыскать первообразную для данной непрерывной $\Phi(x)$ и можно ли ее вообще отыскать конечным образом.

Учащийся должен знать, что алгебраические и всякие иные конечные манипуляции необходимо приводят к весьма ограниченному кругу неопределенных интегралов

$$\int \Phi(x) dx,$$

которые можно фактически (т. е. конечным образом) «взять», т. е. выразить через комбинации известных нам функций, как-то: алгебраических, тригонометрических, обратных круговых, логарифмических и показательных, взятых в конечном числе. Каждые из перечисленных функций, а также и их всевозможные комбинации (в конечном числе) составляют так называемый класс *элементарных функций*. Этот класс, однако, далеко не исчерпывает всех непрерывных функций и, следовательно, далеко не всякий неопределенный интеграл, существование которого доказано, может быть выражен через элементарные функции. Здесь наблюдаются на первых порах многие неожиданности, которые можно приписать как бы капризу случая.

Рассмотрим, например, четыре интеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\ln x}, & \quad \int \frac{\ln x}{x} dx, \\ \int \frac{dx}{\sin x}, & \quad \int \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

Интегралы первой строчки очень похожи на интегралы второй строчки, так как все их различие состоит только в том, что в них вместо \ln написано \sin . И, однако, между ними имеется большая разница. Первый интеграл первой строчки не берется в элементарных функциях, второй же берется очень легко:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Наоборот, первый интеграл второй строчки берется:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C,$$

второй же интеграл не берется (в конечном виде).

Тем не менее функции, которые изображаются интегралами $\int \frac{dx}{\ln x}$ и $\int \frac{\sin x}{x} dx$, *существуют*; значения этих функций могут быть вычислены с любой степенью точности посредством степенных рядов, т. е. эти функции определяются с помощью *бесконечного числа* простых алгебраических операций.

Интегральное исчисление предлагает ряд целесообразных приемов, достаточных для *довольно многих случаев*. Но учащийся не должен заблуждаться относительно силы этих приемов: приемы эти лишь систематизируют и приводят в некоторый порядок первоначальный подход при помощи непосредственного нащупывания и догадки, и ничего более.

§ 8. Таблица основных интегралов и непосредственное интегрирование. При современном состоянии науки интегрирование в сущности есть *процесс целесообразно направленных гаданий и попыток*, для облегчения которых составлена *таблица* так называемых *основных интегралов*.

Способ *непосредственного интегрирования*, о котором здесь идет речь, состоит в том, что *мы сравниваем данный дифференциал $\Phi(x)dx$, который надо проинтегрировать, с формулами этой таблицы, и если окажется, что он там содержится, то интеграл найден.*

Если же его там нет, тогда все-таки пробуют его привести к одному из них, употребляя те или иные приемы, из которых некоторые требуют большого искусства или даже удачи, и достигнуть этого искусства можно только *практикой*.

Большая часть нашей книжки по интегральному исчислению будет посвящена интегрированию таких функций, которые часто встречаются при решении практических задач.

Таблица основных интегралов

$$\text{I. } \int df(v) = f(v) + C.$$

$$\text{II. } \int af(v) dv = a \int f(v) dv.$$

$$\text{III. } \int [f(v) + \varphi(v) - \psi(v)] dv = \\ = \int f(v) dv + \int \varphi(v) dv - \int \psi(v) dv.$$

$$\text{IV. } \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$\text{V. } \int \frac{dv}{v} = \ln v + C.$$

$$\text{VI. } \int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C.$$

$$\text{VII. } \int e^v dv = e^v + C.$$

$$\text{VIII. } \int \sin v dv = -\cos v + C.$$

$$\text{IX. } \int \cos v dv = \sin v + C.$$

$$\text{X. } \int \frac{dv}{\cos^2 v} = \operatorname{tg} v + C.$$

$$\text{XI. } \int \frac{dv}{\sin^2 v} = -\operatorname{ctg} v + C.$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{tg} v dv = -\ln \cos v + C.$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ctg} v \, dv = \ln \sin v + C.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dv}{\sin v} = \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + C.$$

$$\text{XV. } \int \frac{dv}{\cos v} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$\text{XVI. } \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C.$$

$$\text{XVII. } \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v-a}{v+a} + C.$$

$$\text{XVII*} \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} + C.$$

$$\text{XVIII. } \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

$$\text{XIX. } \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

$$\text{XX. } \int \sqrt{a^2 - v^2} \, dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

$$\text{XXI. } \int \sqrt{v^2 \pm a^2} \, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

§ 9. Формулы I, II и III.

Доказательство I. Дифференциал левой части есть: $d \int df(v) = df(v)$, ибо знаки d и \int в комбинации $d \int$ взаимно уничтожаются (§ 6). Дифференциал правой части есть также $df(v)$. Следовательно, имеем $\int df(v) - f(v) = C$. Отсюда $\int df(v) = f(v) + C$.

Доказательство II. Дифференциал левой части есть: $d \int af(v) \, dv = af(v) \, dv$, ибо комбинацию $d \int$ надо зачеркнуть. Так как a есть постоянное, дифференциал правой части есть: $d(a \int f(v) \, dv) = a \cdot d \int f(v) \, dv = af(v) \, dv$. В силу равенства дифференциалов, левая часть отличается от правой на постоянное. Следовательно, имеем $\int af(v) \, dv - a \int f(v) \, dv = C$. Отсюда $\int af(v) \, dv = a \int f(v) \, dv$, где выписывать произвольное постоянное C не имеет смысла, ибо оно уже включено в знак неопределенного интеграла, стоящего в правой части.

Словесно формула II читается так:

постоянный множитель можно писать или перед знаком интеграла, или после него, не изменив результата.

Доказательство III. Дифференциал левой части есть:

$$\begin{aligned} d \int [f(v) + \varphi(v) - \psi(v)] dv &= [f(v) + \varphi(v) - \psi(v)] dv = \\ &= f(v) dv + \varphi(v) dv - \psi(v) dv. \end{aligned}$$

Дифференциал правой части есть:

$$\begin{aligned} d \left[\int f(v) dv + \int \varphi(v) dv - \int \psi(v) dv \right] &= \\ &= d \int f(v) dv + d \int \varphi(v) dv - d \int \psi(v) dv = \\ &= f(v) dv + \varphi(v) dv - \psi(v) dv. \end{aligned}$$

Раз дифференциалы обеих частей равны, самые эти части разнятся лишь на постоянное слагаемое, которое, однако, считается всегда входящим в состав неопределенного интеграла.

Словесно формула III читается так:

интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов этих же функций, взятых отдельно.

§ 10. Формулы IV и V.

Доказательство IV. Так как $d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} + C\right) = v^n dv$, то мы получаем:

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Эта формула имеет силу для *всякого* численного значения показателя n , *кроме одного*: $n = -1$, ибо тогда в правой части формулы IV совершается деление на нуль.

Поэтому случай $n = -1$ рассматривается особо в формуле V, и он, действительно, дает совсем другой ответ.

Доказательство V. Так как $d(\ln v + C) = \frac{dv}{v}$, то мы получаем:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C.$$

Эта важная формула читается:

если под знаком интеграла стоит дробь, числитель которой есть дифференциал знаменателя, тогда интеграл есть натуральный логарифм знаменателя.

ПРИМЕРЫ ¹

Выполнить следующие интегрирования:

$$1. \int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C, \text{ по IV, где } v = x \text{ и } n = 6.$$

$$2. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C, \text{ по IV, где } v = x \text{ и } n = \frac{1}{2}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C, \text{ по IV, где } v = x \text{ и } n = -3.$$

$$4. \int ax^5 dx = a \int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C. \quad \text{по II и IV}$$

$$\begin{aligned} 5. \int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx &= \\ &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx = \quad \text{по III} \\ &= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx = \quad \text{по IV} \\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C. \end{aligned}$$

Примечание. Хотя каждое отдельное интегрирование и требует своего собственного прибавочного произвольного постоянного, мы пишем только одно произвольное постоянное C , обозначающее алгебраическую сумму всех этих отдельных прибавочных постоянных.

$$\begin{aligned} 6. \int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^3} + 3c \sqrt[3]{x^2} \right) dx &= \\ &= \int 2ax^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-3} dx + \int 3cx^{\frac{2}{3}} dx = \quad \text{по III} \\ &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-3} dx + 3c \int x^{\frac{2}{3}} dx = \quad \text{по II} \\ &= 2a \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \frac{x^{-2}}{-2} + 3c \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \quad \text{по IV} \\ &= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$7. \int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = a^2x + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} + C.$$

¹ Когда учатся интегрированию, учащийся должен *вслух* произносить интегрирование простых функций.

У к а з а н и е. Сначала развернуть куб разности.

$$8. \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C.$$

Решение. Этот интеграл берется по формуле IV. Для этого помещаем множитель $2b^2$ непосредственно левее $x dx$, т. е. *под* знаком интеграла; обратную же величину $\frac{1}{2b^2}$ помещаем *перед* знаком интеграла. Эти постоянные множители уравниваются друг другом по формуле II. Далее сравнивают с формулой IV, полагая в ней $v = a^2 + b^2 x^2$, $n = \frac{1}{2}$, $dv = 2b^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx &= \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} 2b^2 x dx = \\ &= \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} b^2 dx^2 = \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} d(b^2 x^2) = \\ &= \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 + b^2 x^2) = \\ &= \left[\frac{1}{2b^2} \int v^{\frac{1}{2}} dv = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C, \text{ по IV} \right] = \frac{(a^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C. \end{aligned}$$

Примечание. Учащийся должен остерегаться выносить за знак интеграла какую-нибудь функцию аргумента x или, наоборот, вносить под знак интеграла какой-нибудь множитель, зависящий от x и стоящий перед знаком интеграла. Эти операции он имеет право проделывать с постоянными множителями (в силу формулы II), но отнюдь не с *функциями*, ибо от этого обязательно изменится величина интеграла.

$$9. \int \frac{3ax dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \ln(b^2 + c^2 x^2) + C.$$

$$\text{Решение.} \int \frac{3ax dx}{b^2 + c^2 x^2} = 3a \int \frac{x dx}{b^2 + c^2 x^2}. \quad \text{по II}$$

Это походит на V. Если мы поставим множитель $2c^2$ под знак интеграла, а его обратную величину $\frac{1}{2c^2}$ перед знаком интеграла, то величина выражения от этого не изменится. Далее сравнивают с V, где $v = b^2 + c^2 x^2$, $dv = 2c^2 x dx$.

Весь процесс интегрирования таков:

$$\begin{aligned} \int \frac{3ax dx}{b^2 + c^2 x^2} &= 3a \int \frac{x dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3}{2} a \int \frac{2x dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2} \int \frac{dx^2}{b^2 + c^2 x^2} = \\ &= \frac{3a}{2c^2} \int \frac{c^2 dx^2}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \int \frac{dc^2 x^2}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \int \frac{d(b^2 + c^2 x^2)}{b^2 + c^2 x^2} = \\ &= \left[\frac{3a}{2c^2} \int \frac{dv}{v} = \frac{3a}{2c^2} \ln v + C, \text{ по V} \right] = \frac{3a}{2c^2} \ln(b^2 + c^2 x^2) + C. \end{aligned}$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{x+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1) + C.$$

Решение. Сперва делим числитель на знаменатель.

Тогда

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Подставляем в интеграл, пользуемся III и интегрируем.

$$11. \int \frac{2x-1}{2x+3} dx = x - \ln(2x+3)^2 + C.$$

Решение. Делим: $\frac{2x-1}{2x+3} = 1 - \frac{4}{2x+3}$, подставляем, пользуемся III

и т. д.

ЗАДАЧИ

Выполнить и проверить следующие интегрирования:

$$1. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$8. \int \sqrt{3} x dx = \frac{2x\sqrt{3x}}{3} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{ax}} = \frac{2\sqrt{ax}}{a} + C.$$

$$3. \int x \sqrt{x} dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$$

$$10. \int \sqrt{2px} dx = \frac{2x\sqrt{2px}}{3} + C.$$

$$4. \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$$

$$11. \int (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) dx = \\ = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 7x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$$

$$12. \int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx = \\ = 4x - 4\sqrt{x} + C.$$

$$6. \int 4t dt = 2t^2 + C.$$

$$7. \int \frac{ay^2 dy}{b} = \frac{ay^3}{3b} + C.$$

$$13. \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^3} \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C.$$

$$14. \int x(2x-5) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + C.$$

$$15. \int \frac{x^4 - 10x^2 + 5}{x^2} dx = \frac{x^3}{3} - 10x + \frac{5}{x} + C.$$

$$16. \int \sqrt{1+2x} dx = \frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{\sqrt{5-4x}}{2} + C.$$

$$18. \int \left(\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}} \right) dx = \frac{2x\sqrt{2x}}{3} + 2\sqrt{2x} + C.$$

$$19. \int \frac{4x \, dx}{\sqrt{3x}} = \frac{8x \sqrt{3x}}{9} + C.$$

$$20. \int (3-2x)^3 \, dx = -\frac{(3-2x)^3}{6} + C.$$

$$21. \int \frac{3x \, dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2(x^2+1)} + C.$$

$$22. \int x \sqrt{2x^2+7} \, dx = \frac{(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

$$23. \int 9x^2 \sqrt[3]{x^3+10} \, dx = \frac{9(x^3+10)^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$$

$$24. \int \frac{4x \, dx}{\sqrt[3]{8-x^2}} = -3(8-x^2)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$25. \int (1+\sqrt{x})^2 \, dx = x + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

$$26. \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \, dx = x - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C.$$

$$27. \int \sqrt{x}(1-x^2) \, dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$$

$$28. \int (3t+2)^3 \, dt = \frac{(3t+2)^4}{12} + C.$$

$$29. \int \frac{7dy}{(1+2y)^3} = -\frac{7}{4(1+2y)^2} + C.$$

$$30. \int t^2(2-t^3)^3 \, dt = -\frac{(2-t^3)^4}{12} + C.$$

$$31. \int \frac{x^2 \, dx}{(3+2x^3)^2} = -\frac{1}{6(3+2x^3)} + C.$$

$$32. \int 5x \sqrt{1-2x^2} \, dx = -\frac{5(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$$

$$33. \int \left(2x^{\frac{3}{2}}+1\right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{x} \, dx = \frac{\left(2x^{\frac{3}{2}}+1\right)^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$$

$$34. \int \frac{(x+1) \, dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + C.$$

$$35. \int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} \, dx = -\frac{4(1-(\sqrt{x})^{\frac{3}{2}})}{3} + C.$$

$$36. \int \frac{(2 + \ln x) dx}{x} = \frac{(2 + \ln x)^2}{2} + C.$$

$$37. \int \sin^3 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{(\sin x)^3}{3} + C.$$

У к а з а н и е. Пользоваться IV, делая $v = \sin x$, $dv = \cos x dx$, $n = 2$.

$$38. \int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{\sin^2 2x}{4} + C.$$

$$39. \int \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = -\frac{2 \sin^3 \frac{x}{2}}{3} + C.$$

$$40. \int \operatorname{tg} ax \cdot \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\operatorname{tg}^2 ax}{2a} + C.$$

$$41. \int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{5 + \cos 3x}} = -\frac{2\sqrt{5 + \cos 3x}}{3} + C.$$

$$42. \int \left(\frac{\operatorname{se} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^2 dx = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + C.$$

$$43. \int \frac{dx}{3 + 2x} = \frac{1}{2} \ln(3 + 2x) + C.$$

$$44. \int \frac{x dx}{2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln(2 - x^2) + C.$$

$$45. \int \frac{(2x + 5) dx}{x^2 + 5x} = \ln(x^2 + 5x) + C.$$

$$46. \int \frac{2x^2 dx}{8x^3 - 7} = \frac{1}{12} \ln(8x^3 - 7) + C.$$

$$47. \int \frac{at^n dt}{1 + bt^{n+1}} = \frac{a}{(n+1)b} \ln(1 + bt^{n+1}) + C.$$

$$48. \int \frac{e^{\theta} d\theta}{4 - 3e^{\theta}} = -\frac{1}{3} \ln(4 - 3e^{\theta}) + C.$$

$$49. \int \frac{2 \cos x dx}{4 + \sin x} = 2 \ln(4 + \sin x) + C.$$

$$50. \int \frac{\operatorname{se}^2 y dy}{a + b \operatorname{tg} y} = \frac{1}{b} \ln(a + b \operatorname{tg} y) + C.$$

$$51. \int \frac{x + 2}{x - 1} dx = x + 3 \ln(x - 1) + C.$$

$$52. \int \frac{(x - 1)^2 dx}{2x} = \frac{x^2}{4} - x + \ln \sqrt{x} + C.$$

$$53. \int \frac{x^2 - 4}{x - 3} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 5 \ln(x - 3) + C.$$

$$54. \int \frac{e^{2s} ds}{e^s + 1} = e^s - \ln(e^s + 1) + C.$$

$$55. \int \frac{ae^{\theta} + b}{ae^{\theta} - b} d\theta = 2 \ln(ae^{\theta} - b) - \theta + C.$$

Выполните следующие интегрирования и проверьте ваши результаты дифференцированием:

56. $\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$

Решение. $\int \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = \int \frac{dx^2}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(6-5x^2)}{\sqrt[3]{6-5x^2}} =$
 $= -\frac{1}{5} \int (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}} d(6-5x^2) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(6-5x^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$
 $= -\frac{3}{10} (6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C.$

Проверка. $d \left\{ -\frac{3}{10} (6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C \right\} =$
 $= -\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}} (-10x) dx = \frac{2x dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$

57. $\int x^5 dx.$

60. $\int (3y)^{\frac{2}{3}} dy.$

63. $\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}.$

58. $\int \frac{dx}{x^3}.$

61. $\int \frac{dr}{\sqrt{2r^3}}.$

64. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 2}}.$

59. $\int \sqrt[3]{9t^2} dt.$

62. $\int \frac{a dx}{\sqrt[3]{bx^2}}.$

65. $\int \frac{2 dx}{3x - 2}.$

66. $\int \operatorname{tg}^2 w \cdot \operatorname{sc}^2 w \cdot dw.$

74. $\int \frac{(\ln x)^2 dx}{2x}.$

67. $\int x \sqrt[3]{4-x^2} dx.$

75. $\int \operatorname{sc}^4 \Phi \operatorname{tg} \Phi d\Phi.$

68. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

76. $\int \frac{s^2 - 5}{r + 2} ds.$

69. $\int \frac{(3-2x)^2 dx}{x}.$

77. $\int \frac{\operatorname{cs}^2 \theta d\theta}{2 \operatorname{ctg} \theta + 3}.$

70. $\int \frac{(2x-3) dx}{x^2-3x+5}.$

78. $\int \frac{2x-7}{x+4} dx.$

71. $\int \frac{\cos a\theta d\theta}{b - \sin a\theta}.$

79. $\int \frac{3x dx}{(2x^2-1)^2}.$

72. $\int e^x (e^x + 2)^2 dx.$

80. $\int \frac{x^3 + x}{x^2 + 2} dx.$

73. $\int \left(y - \frac{1}{y} \right)^3 dy.$

81. $\int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} dx.$

§ 11. Формулы VI и VII. Эти формулы следуют сразу из соответствующих формул дифференцирования.

Пример. Доказать $\int ba^{2x} dx = \frac{ba^{2x}}{2 \ln a} + C$.

Решение. $\int ba^{2x} dx = b \int a^{2x} dx$ по II.

Это походит на VI. Полагаем $2x = v$; тогда $dv = 2dx$. Если мы поставим теперь множитель 2 непосредственно перед dx и множитель $\frac{1}{2}$ впереди знака интеграла, мы имеем:

$$\begin{aligned} b \int a^{2x} dx &= \frac{b}{2} \int a^{2x} 2 dx = \frac{b}{2} \int a^{2x} d(2x) = \\ &= \left[\frac{b}{2} \int a^v dv = \frac{b}{2} \frac{a^v}{\ln a} + C \right] = \frac{b}{2} \cdot \frac{a^{2x}}{\ln a} + C \text{ по VI.} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

Выполнить следующие интегрирования:

- $\int 4e^{2x} dx = 2e^{2x} + C.$
- $\int 2e^{\frac{x}{3}} dx = 6e^{\frac{x}{3}} + C.$
- $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$
- $\int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C.$
- $\int a^{ny} dy = \frac{a^{ny}}{n \ln a} + C.$
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + C.$
- $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + C.$
- $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^3 dx = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right) - 2x + C.$
- $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$
- $\int e^{\cos x} \sin x dx = -e^{\cos x} + C.$
- $\int e^{\sin 2\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} e^{\sin 2\theta} + C.$
- $\int \sqrt{e^t} dt = 2\sqrt{e^t} + C.$
- $\int a^x e^x dx = \frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C.$
- $\int (x-1) e^{x^2-2x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-2x} + C.$
- $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

Выполните следующие интегрирования и проверьте ваши результаты дифференцированием:

- | | | |
|--|--|--|
| 16. $\int e^{1-x} dx.$ | 22. $\int \left(\frac{e^x + 2}{e^x} \right) dx.$ | 27. $\int e^{\sin \pi t} \cos \pi t dt.$ |
| 17. $\int 4e^{\frac{x}{4}} dx.$ | 23. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$ | 28. $\int x e^{-x^2} dx.$ |
| 18. $\int \pi e^{\frac{\pi x}{2}} dx.$ | 24. $\int 2e^{\operatorname{tg} \theta} \operatorname{sc}^2 \theta d\theta.$ | 29. $\int (e^t - e^{-t})^3 dt.$ |
| 19. $\int 6^x dx.$ | 25. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}} dx.$ | 30. $\int (4e)^x dx.$ |
| 20. $\int (e^x + x) dx.$ | 26. $\int (e^{2x})^3 dx.$ | 31. $\int \frac{x^3 dx}{e^{x^2}}.$ |
| 21. $\int \frac{dx}{5^x}.$ | | |

§ 12. Формулы VIII—XV. Формулы VIII—XI сразу вытекают из соответствующих формул дифференцирования.

Доказательство XII.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} v dv &= \int \frac{\sin v}{\cos v} dv = - \int \frac{-\sin v dv}{\cos v} = - \int \frac{d \cos v}{\cos v} = \\ &= -\ln \cos v + C, \text{ по формуле V.} \end{aligned}$$

Доказательство XIII.

$$\int \operatorname{ctg} v dv = \int \frac{\cos v}{\sin v} dv = \int \frac{d \sin v}{\sin v} = \ln \sin v + C, \text{ по формуле V.}$$

Доказательство XIV.

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{\sin v} &= \int \frac{dv}{2 \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{v}{2}}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \cos^2 \frac{v}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{v}{2}} = \\ &= \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} + C. \end{aligned}$$

Доказательство XV.

$$\int \frac{dv}{\cos v} = \int \frac{dv}{\sin \left(v + \frac{\pi}{2} \right)} = \int \frac{d \left(v + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(v + \frac{\pi}{2} \right)} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

Пример 1. Доказать правильность равенства:

$$\int \sin 2ax dx = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C.$$

Решение. Это походит на VIII. Полагаем $v = 2ax$; тогда $dv = 2a dx$. Если мы теперь поставим множитель $2a$ непосредственно левее dx и обратный множитель $\frac{1}{2a}$ перед знаком интеграла, то получим:

$$\begin{aligned} \int \sin 2ax dx &= \frac{1}{2a} \int \sin 2ax \cdot 2a dx \left[= \frac{1}{2a} \int \sin v dv = \right. \\ &= \left. -\frac{1}{2a} \cos v + C \text{ по VIII} \right] = \frac{1}{2a} \cdot (-\cos 2ax) + C = -\frac{\cos 2ax}{2a} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Доказать следующее интегрирование:

$$\int (\operatorname{tg} 2s - 1)^2 ds = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2s + \ln \cos 2s + C.$$

Решение. $(\operatorname{tg} 2s - 1)^2 = \operatorname{tg}^2 2s - 2 \operatorname{tg} 2s + 1$, причем $\operatorname{tg}^2 2s = \frac{1}{\cos^2 2s} - 1$.

Отсюда, подставляя, имеем:

$$\int (\operatorname{tg} 2s - 1)^2 ds = \int \left(\frac{1}{\cos^2 2s} - 2 \operatorname{tg} 2s \right) ds = \int \frac{ds}{\cos^2 2s} - 2 \int \operatorname{tg} 2s ds.$$

Полагаем $v = 2s$; тогда $dv = 2ds$. Формулы X и XII побуждают нас сделать следующие шаги:

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{\cos^2 2s} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2s)}{\cos^2 (2s)} \left[= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\cos^2 v} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} v + C \right] = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2s + C. \\ \int \operatorname{tg} 2s ds &= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg} 2s d(2s) \left[= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg} v dv = -\frac{1}{2} \ln \cos v \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \cos 2s + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

Проверить следующие интегрирования:

1. $\int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C.$
2. $\int \cos 3\theta d\theta = \frac{1}{3} \sin 3\theta + C.$
3. $\int \operatorname{tg} n\Phi d\Phi = -\frac{1}{n} \ln \cos n\Phi + C.$
4. $\int \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \ln \sin \frac{\theta}{2} + C.$
5. $\int \frac{dx}{\cos 4x} = \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + C.$
6. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{a}} = a \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2a} + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 (1-x)} = -\operatorname{tg} (1-x) + C.$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{2-x}{2}\right)} = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{2-x}{2}\right) + C.$$

$$9. \int \operatorname{sc} 2\theta \cdot \operatorname{tg} 3\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sc} 3\theta + C.$$

$$10. \int \operatorname{csc} \frac{y}{4} \operatorname{ctg} \frac{y}{4} \, dy = -4 \operatorname{csc} \frac{y}{4} + C.$$

$$11. \int \frac{\sin \frac{1}{x} \, dx}{x^2} = \cos \frac{1}{x} + C.$$

$$12. \int \frac{\cos \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}} = 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

$$13. \int x \operatorname{tg} (x^2) \, dx = -\frac{1}{2} \ln \cos (x^2) + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{csc} x + C.$$

У к а з а н и е. Умножить числитель и знаменатель на $1 - \cos x$ и преобразовать до интегрирования.

$$15. \int \frac{dx}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{sc} x + C.$$

$$16. \int \frac{\sin s \, ds}{1 + \cos s} = -\ln (1 + \cos s) + C.$$

$$17. \int \frac{\operatorname{sc}^2 x \, dx}{1 + \operatorname{tg} x} = \ln (1 + \operatorname{tg} x) + C.$$

$$18. \int e^x \cos e^x \, dx = \sin e^x + C.$$

$$19. \int \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} \, d\theta = \sin^3 \frac{\theta}{3} + C.$$

$$20. \int (x - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} (x^2 - \sin 2x) + C.$$

$$21. \int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + \sin x}} = 2\sqrt{1 + \sin x} + C.$$

$$22. \int \frac{d\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} + C.$$

Выполнить следующие интегрирования и проверить полученные результаты дифференцированием:

$$23. \int \sin \frac{3x}{4} \, dx.$$

$$26. \int \operatorname{tg} \frac{\theta}{n} \, d\theta.$$

$$24. \int \frac{2 \, ds}{\sin 4s}.$$

$$27. \int \operatorname{ctg} 5y \, dy.$$

$$25. \int a \cos b\theta \, d\theta.$$

$$28. \int \frac{dx}{\cos (3x - 2)}.$$

$$29. \int \frac{dx}{\sin(b-ax)}.$$

$$30. \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{a}}.$$

$$31. \int \frac{dy}{\sin^2 4y}.$$

$$32. \int \frac{\operatorname{tg} m\Phi}{\cos m\Phi} d\Phi.$$

$$33. \int \frac{\operatorname{ctg} 7x}{\sin 7x} dx.$$

$$34. \int \frac{\sin \sqrt{t} dt}{4 \sqrt{t}}.$$

$$35. \int \operatorname{tg} \frac{2}{x} dx.$$

$$36. \int (1 + 2 \operatorname{sc} \theta)^2 d\theta.$$

$$37. \int (2 - \operatorname{csc} x)^2 dx.$$

$$38. \int (\operatorname{tg} s - \operatorname{ctg} s)^2 ds.$$

$$39. \int \frac{dx}{\sin^2 3x}.$$

$$40. \int \frac{dy}{3 \cos y}.$$

$$41. \int \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$$

$$42. \int \frac{\cos 2x dx}{1 - \cos 2x}.$$

$$43. \int (\operatorname{tg} x - \operatorname{sc} x)^2 dx.$$

$$44. \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta.$$

$$45. \int \frac{\operatorname{sc} x \operatorname{tg} x dx}{2 + 3 \operatorname{sc} x}.$$

$$46. \int \frac{a dy}{\operatorname{ctg} by}.$$

$$47. \int x^2 \sin(x^3) dx.$$

$$48. \int (x^2 + 3 \sin x) dx.$$

$$49. \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{\cos x} \right) dx.$$

$$50. \int \left(1 + 2 \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \right)^2 ds.$$

§ 13. Формулы XVI—XIX. Формулы XVI—XVIII легко выводятся из соответствующих формул дифференцирования.

Доказательство XVI. Так как

$$d \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C \right) = \frac{1}{a} \frac{d \left(\frac{v}{a} \right)}{1 + \frac{v^2}{a^2}} = \frac{dv}{v^2 + a^2},$$

то мы получаем:

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C.$$

Доказательства XVII и XVII*. Докажем сперва XVII. Алгебра дает нам равенство:

$$\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a} = \frac{2a}{v^2 - a^2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a} \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{dv}{v-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dv}{v+a} = \\ &= \frac{1}{2a} \ln(v-a) - \frac{1}{2a} \ln(v+a) + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{v-a}{v+a} + C. \end{aligned}$$

Та же алгебра для XVII* нам дает:

$$\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} = \frac{2a}{a^2-v^2}.$$

Остаток доказательства тот же самый.

Примечание. Интегралы XVII и XVII* связаны очевидным равенством:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = - \int \frac{dv}{a^2-v^2}.$$

Отсюда следует, что к каждому случаю применимы одновременно обе формулы. Позднее мы увидим, что во многих случаях обстоятельства заставляют избрать только одну формулу, отбросив другую.

Доказательство XVIII. Так как

$$d\left(\arcsin \frac{v}{a} + C\right) = \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}},$$

то

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

Доказательство XIX. Так как

$$\begin{aligned} d[\ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2})] &= \frac{d(v + \sqrt{v^2 \pm a^2})}{v + \sqrt{v^2 \pm a^2}} = \\ &= \frac{dv + \frac{2v dv}{2\sqrt{v^2 \pm a^2}}}{v + \sqrt{v^2 \pm a^2}} = \frac{\left(1 + \frac{v}{\sqrt{v^2 \pm a^2}}\right) dv}{v + \sqrt{v^2 \pm a^2}} = \\ &= \frac{v + \sqrt{v^2 \pm a^2}}{v + \sqrt{v^2 \pm a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} \cdot dv = \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}}, \end{aligned}$$

то

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

Пример. Произвести интегрирование:

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.$$

Решение. Это напоминает XVI. Ибо, полагая $v^2 = 4x^2$ и $a^2 = 9$, мы имеем: $v = 2x$, $dv = 2dx$ и $a = 3$. Поэтому, если мы ставим множителем при dx число 2, а перед знаком интеграла $\frac{1}{2}$, то получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2+9} &= \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{4x^2+9} = \left[\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C \right] = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

Проверить следующие интегрирования:

1. $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$
2. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3} + C.$
3. $\int \frac{dy}{\sqrt{16-y^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{y}{4} + C.$
4. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-4}} = \ln (s + \sqrt{s^2-4}) + C.$
5. $\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right) + C.$
6. $\int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{3t+2}{4t-2} \right) + C.$
7. $\int \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x \sqrt{2} + C.$
8. $\int \frac{2dw}{3-8w^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{3}+w\sqrt{8}}{\sqrt{3}-w\sqrt{8}} + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \sin \frac{3x}{2} + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}} = \frac{1}{2} \ln (2x + \sqrt{4x^2+3}) + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-7x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arc} \sin \frac{x\sqrt{7}}{3} + C.$
12. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \ln (x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+2}) + C.$
13. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + C.$
14. $\int \frac{\cos t dt}{4-\sin^2 t} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2+\sin t}{2-\sin t} \right) + C.$
15. $\int \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \operatorname{arc} \sin (x^2) + C.$
16. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{2} \ln (ay + \sqrt{1+a^2y^2}) + C.$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-(u+b)^2}} = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{u+b}{a} \right) + C.$

Выполнить следующие интегрирования и проверить полученные результаты прямым дифференцированием:

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$
19. $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^2+25}}.$
20. $\int \frac{dt}{9t^2+16}.$

21. $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}.$

25. $\int \frac{t dt}{\sqrt{4t^4 - 9}}.$

29. $\int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2 \theta}}.$

22. $\int \frac{6 dx}{5 + 3x^2}.$

26. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x^2 + 7}}.$

30. $\int \frac{dx}{m^2 + (x + n)^2}.$

23. $\int \frac{2 dy}{4y^2 - 1}.$

27. $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$

31. $\int \frac{du}{4 - (2u - 1)^2}.$

24. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2 + 8}}.$

28. $\int \frac{4t dt}{6 - 5t^2}.$

В табличных формулах XVI—XIX в знаменателях — либо непосредственно, либо под корнем — содержатся выражения 2-й степени *только с двумя* членами. Если же нам встречается интеграл аналогичного вида, но содержащий в знаменателе — непосредственно или под корнем — полное выражение 2-й степени с *тремя* членами, то его надо сначала преобразовать в двучленное выражение. Для этого берут сумму двух старших (переменных) членов и пополняют ее постоянной величиной так, чтобы образовался точный квадрат. Эту постоянную величину подбирают надлежащим образом. Как это делается, показано на трех следующих примерах.

Пример 1. Выполнить интегрирование:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Решение. Имеем:

$$x^2 + 2x + 5 = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x+1)^2 + 4.$$

Значит:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2}.$$

Это походит на XVI, ибо можно положить $v = x+1$ и $a = 2$. Тогда $dv = dx$. Поэтому интеграл становится

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{a} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{2 dx}{\sqrt{2+x-x^2}} = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{2x-1}{3} + C.$$

Решение. Это походит на XVIII, ибо коэффициент при x^2 отрицательный. Имеем:

$$2+x-x^2 = 2 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Полагаем $v = x - \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$. Тогда $dv = dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2 dx}{\sqrt{2+x-x^2}} &= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \\ &= \left[2 \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{v}{a} + C \right] = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{2x-1}{3} + C. \quad (\text{по XVIII}) \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \frac{1}{10} \ln \frac{3x-3}{3x+7} + C.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-7 &= 3\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right) = 3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{25}{9}\right) = \\ &= 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]. \end{aligned}$$

Значит:

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x-7} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]} = \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2-a^2}, \quad (\text{по XVII})$$

ибо можно положить: $v = x + \frac{2}{3}$ и $a = \frac{5}{3}$. Тогда $dv = dx$ и мы находим:

$$\frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{6a} \ln \frac{v-a}{v+a} + C = \frac{1}{10} \ln \frac{x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}} + C \text{ и т. д.}$$

ЗАДАЧИ

Выполнить следующие интегрирования:

1. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right) + C.$
2. $\int \frac{dx}{2x-x^2-10} = -\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x-1}{3} \right) + C.$
3. $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x-4}{3} \right) + C.$
4. $\int \frac{dx}{x^2-6x+12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x-3}{\sqrt{3}} \right) + C.$
5. $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+2} \right) + C.$
6. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x}{x-4} \right) + C.$
7. $\int \frac{dx}{x^2+3x+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}} \right) + C.$
8. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x+1}{2} \right) + C.$
9. $\int \frac{dx}{9x^2-6x-8} = \frac{1}{18} \ln \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right) + C.$
10. $\int \frac{8dt}{16t^2+8t+9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{4t+1}{2\sqrt{2}} \right) + C.$
11. $\int \frac{x dx}{x^4+2x^2+2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x^2+1) + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}} = \arcsin \left(\frac{x-1}{4} \right) + C.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}} = \ln(x-3 + \sqrt{11-6x+x^2}) + C.$
14. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5-4x-3x^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{3x+2}{\sqrt{19}} \right) + C.$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \arcsin(x-1) + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+4x^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{7}{8} + \sqrt{x^2 + \frac{7x}{4}} \right) + C.$
17. $\int \frac{6dx}{\sqrt{9-8x-7x^2}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \arcsin \left(\frac{7x+4}{\sqrt{79}} \right) + C.$

Взять каждый из следующих интегралов и проверить результаты дифференцированием:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 18. $\int \frac{5dx}{x^3+12x+11}.$ | 29. $\int \frac{x^2 dx}{x^6-6x^3+5}.$ |
| 19. $\int \frac{dx}{4x-x^2-2}.$ | 30. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-12x-x^2}}.$ |
| 20. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}.$ | 31. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-6x-x^2}}.$ |
| 21. $\int \frac{5dy}{9y^2+12y-21}.$ | 32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}.$ |
| 22. $\int \frac{4dt}{4t^2+12t+5}.$ | 33. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t-2t^2}}.$ |
| 23. $\int \frac{12du}{9u^2-6u+5}.$ | 34. $\int \frac{dy}{\sqrt{1-6y-9y^2}}.$ |
| 24. $\int \frac{dx}{9x^2+3x+1}.$ | 35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-4x^2}}.$ |
| 25. $\int \frac{dx}{9x^2-3x-1}.$ | 36. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2+12x+11}}.$ |
| 26. $\int \frac{2dx}{3x^2+4x+5}.$ | 37. $\int \frac{6dt}{\sqrt{1-t-t^2}}.$ |
| 27. $\int \frac{4dx}{5x^2+6x+7}.$ | 38. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-6x^3+5}}.$ |
| 28. $\int \frac{4dx}{5x^2-7x-6}.$ | 39. $\int \frac{5du}{\sqrt{5+u-u^2}}.$ |

Если интегрируемое выражение есть дробь, у которой знаменатель есть выражение 2-й степени или корень квадратный из такового, а числитель есть выражение *первой* степени, тогда интеграл приводится к табличным интегралам, как это показывают следующие примеры.

Пример 1. Доказать, что

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2+9} - \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$$

Решение. Разбиваем интеграл на части:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2+9}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}},$$

каждую из которых берем в отдельности по формулам IV и XIX.

Пример 2.

$$\int \frac{2x-3}{3x^3+4x-7} dx = \frac{1}{3} \ln\left(x^3 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right) - \frac{13}{30} \ln \frac{3x-2}{3x+7} + C.$$

Решение. $3x^3+4x-7=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^3-\frac{25}{9}\right]$. Полагая $v=x+\frac{2}{3}$,

имеем: $x=v-\frac{2}{3}$ и $dv=dx$.

Подставим:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{3x^3+4x-7} dx &= \int \frac{2\left(v-\frac{2}{3}\right)-3}{3\left(v^3-\frac{25}{9}\right)} dv = \frac{1}{9} \int \frac{6v-13}{v^3-\frac{25}{9}} dv = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{2v dv}{v^3-\frac{25}{9}} - \frac{13}{9} \int \frac{dv}{v^3-\frac{25}{9}}. \end{aligned}$$

Пользуясь V и XVII и делая обратную замену $v=x+\frac{2}{3}$, мы получаем искомый результат.

ЗАДАЧИ

Выполнить следующие интегрирования:

- $\int \frac{(2x+3) dx}{4x^2+1} = \frac{1}{4} \ln(4x^2+1) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} 2x + C.$
- $\int \frac{(6x-1) dx}{1-9x^2} = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right) - \frac{1}{3} \ln(9x^2-1) + C.$
- $\int \frac{(2x-3) dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3} \ln(3x^2-2) - \frac{\sqrt{6}}{4} \ln\left(\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) + C.$
- $\int \frac{(2x-1) dx}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$
- $\int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \operatorname{arcsin} x + C.$
- $\int \frac{(6x+5) dx}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{9x^2+1} + \frac{5}{3} \ln(3x+\sqrt{9x^2+1}) + C.$
- $\int \frac{(1-2x) dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C.$

8. $\int \frac{(x+3) dx}{6x-x^2} = -\frac{1}{2} \ln(6x-x^2) - \ln\left(\frac{x-6}{x}\right) + C.$
9. $\int \frac{(2x+5) dx}{x^3+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$
10. $\int \frac{x dx}{2-6x-x^2} = -\frac{1}{2} \ln(2-6x-x^2) + \frac{3}{2\sqrt{11}} \ln\left(\frac{x+3-\sqrt{11}}{x+3+\sqrt{11}}\right) + C.$
11. $\int \frac{(1-x) dx}{4x^2-4x-3} = -\frac{1}{8} \ln(4x^2-4x-3) + \frac{1}{16} \ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right) + C.$
12. $\int \frac{(3x-2) dx}{1-6x-9x^2} = -\frac{1}{6} \ln(1-6x-9x^2) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right) + C.$
13. $\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{x^3+2x}} = \sqrt{x^3+2x} + 2 \ln(x+1+\sqrt{x^3+2x}) + C.$
14. $\int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4 \operatorname{arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$
15. $\int \frac{x dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3 \operatorname{arcsin}\left(\frac{x-3}{6}\right) + C.$
16. $\int \frac{(3x+2) dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19-5x+x^2} +$
 $+ \frac{19}{2} \ln\left(x - \frac{5}{2} + \sqrt{19-5x+x^2}\right) + C.$
17. $\int \frac{(3x-2) dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2-4x+5} -$
 $- \frac{1}{4} \ln(2x-1 + \sqrt{4x^2-4x+5}) + C.$
18. $\int \frac{(8x-3) dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2} \operatorname{arcsin}\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C.$

Взять каждый из следующих интегралов и проверить результаты дифференцированием:

- | | |
|---|---|
| 19. $\int \frac{(x+1) dx}{x^2+1}.$ | 25. $\int \frac{(6-x) dx}{5x-x^2}.$ |
| 20. $\int \frac{(x-2) dx}{x^2-1}.$ | 26. $\int \frac{(x-6) dx}{x^2-4x-5}.$ |
| 21. $\int \frac{(7x-3x) dx}{5-2x^2}.$ | 27. $\int \frac{(3x-5) dx}{x^2+8x+20}.$ |
| 22. $\int \frac{(3x-1) dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$ | 28. $\int \frac{(5x-3) dx}{x^2-6x-7}.$ |
| 23. $\int \frac{(9+x) dx}{\sqrt{5+2x^2}}.$ | 29. $\int \frac{x dx}{x^2-8x+18}.$ |
| 24. $\int \frac{(2x+3) dx}{x^2+3x}.$ | 30. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3x+9x^2}}.$ |

$$31. \int \frac{x dx}{\sqrt{3x-2x^2}}.$$

$$33. \int \frac{(6x+5) dx}{\sqrt{6+x-x^2}}.$$

$$32. \int \frac{(4x+5) dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$$

$$34. \int \frac{(3x-2) dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}.$$

§ 14. Формулы XX и XXI. Для получения этих формул мы прибегнем к способу так называемого «интегрирования по частям», который будет разъяснен дальше и сущность которого заключается в следующем.

Часто бывает трудно взять какой-нибудь интеграл $\int u dv$, где u и v суть некоторые данные нам функции того или иного независимого переменного, но зато, взамен этого, *иногда* оказывается легко взять интеграл $\int v du$, который можно записать, обменяв местами буквы u и v в предыдущем трудно берущемся интеграле. Такие два интеграла называются *взаимными* один по отношению к другому.

На первый взгляд кажется, что сумму двух взаимных интегралов найти так же трудно, как и каждый из них в отдельности. Но такое заключение обманчиво, ибо эта сумма вычисляется мгновенно и дает чисто алгебраический результат: произведение $u \cdot v$.

Чтобы видеть это, возьмем формулу Лейбница

$$d(uv) = u dv + v du \quad (1)$$

и проинтегрируем это равенство:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du.$$

В левой части знаки интеграла и дифференциала, поставленные рядом, взаимно уничтожат друг друга и дадут произведение $u \cdot v$, к которому не имеет смысла присоединять произвольное постоянное, потому что в правой части стоят два неопределенные интеграла, включающие в себя, и без того, прибавочные произвольные постоянные. Следовательно, предыдущее равенство перепишется в виде:

$$u \cdot v = \int u dv + \int v du. \quad (2)$$

А это и означает, что сумма двух взаимных интегралов равна алгебраическому выражению $u \cdot v$.

Из этого равенства следует, что если нам известен один из взаимных интегралов, например $\int v du$, то другой взаимный интеграл $\int u dv$ можно считать уже найденным, ибо из равенства (2) мы имеем:

$$\text{XXII.} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Указанный прием есть излюбленный прием интегрирования, и он носит название «интегрирования по частям». Успех этого приема зависит, разумеется, от удачи в выборе функций u и v .

Доказательство XX. Обозначим через I неизвестный нам интеграл:

$$I = \int \sqrt{a^2 - v^2} dv.$$

Умножая и деля на $\sqrt{a^2 - v^2}$, имеем:

$$I = \int \frac{a^2 - v^2}{\sqrt{a^2 - v^2}} dv = \int \frac{a^2 dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} - \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}. \quad (3)$$

Первый интеграл легко берется по таблице:

$$\int \frac{a^2 dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = a^2 \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = a^2 \arcsin \frac{v}{a} + C. \quad (4)$$

Второй же интеграл легко выразить опять через I . В самом деле, имеем:

$$- \int \frac{v^3 dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \int \frac{v \cdot -2v dv}{2\sqrt{a^2 - v^2}} = \int \frac{vd(a^2 - v^2)}{2\sqrt{a^2 - v^2}} = \int vd\sqrt{a^2 - v^2} =$$

[применив интегрирование по частям]

$$= v\sqrt{a^2 - v^2} - \int \sqrt{a^2 - v^2} dv = v\sqrt{a^2 - v^2} - I. \quad (5)$$

Сделав подстановку в равенство (3) результатов (4) и (5), имеем:

$$I = a^2 \arcsin \frac{v}{a} + v\sqrt{a^2 - v^2} - I. \quad (6)$$

В это уравнение не следует вносить произвольного постоянного C , ибо таковое включено в I . Таким образом, мы получили одно алгебраическое уравнение (6) с одним неизвестным I . Решая его относительно I , имеем:

$$2I = a^2 \arcsin \frac{v}{a} + v\sqrt{a^2 - v^2}$$

и окончательно:

$$I = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{v}{a} + C.$$

Доказательство XXI. Обозначим через I неизвестный нам интеграл:

$$I = \int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv.$$

Умножая и деля на $\sqrt{v^2 \pm a^2}$, имеем:

$$I = \int \frac{v^2 \pm a^2}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} dv = \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} + \int \frac{\pm a^2 dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}}.$$

Второй интеграл содержится в таблице:

$$\int \frac{\pm a^2 dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \pm a^2 \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \pm a^2 \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C. \quad (8)$$

Первый интеграл легко выразить опять через I . В самом деле, имеем:

$$\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \int \frac{v \cdot 2v dv}{2\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \int \frac{vd(v^2 \pm a^2)}{2\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \int vd\sqrt{v^2 \pm a^2} =$$

[применив интегрирование по частям]

$$= v\sqrt{v^2 \pm a^2} - \int \sqrt{v^2 \pm a^2} dv = v\sqrt{v^2 \pm a^2} - I. \quad (9)$$

Сделав подстановку в равенство (7) результатов (8) и (9), мы получаем:

$$I = \pm a^2 \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + v\sqrt{v^2 \pm a^2} - I. \quad (10)$$

Решая алгебраическое уравнение (10) относительно буквы I , мы находим:

$$I = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

Пример 1. Доказать, что

$$\int \sqrt{4-9x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{4-9x^2} + \frac{2}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

Решение. Сравниваем с XX, где полагаем $a^2 = 4$ и $v = 3x$. Тогда $dv = 3dx$. Отсюда

$$\int \sqrt{4-9x^2} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{4-9x^2} 3 dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{a^2 - v^2} dv.$$

Употребляя формулу XX и восстановив: $v = 3x$ и $a^2 = 4$, мы получим ответ.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int \sqrt{3x^2 + 4x - 7} dx &= \frac{1}{6} (3x + 2) \sqrt{3x^2 + 4x - 7} - \\ &- \frac{25\sqrt{3}}{18} \ln(3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x - 21}) + C. \end{aligned}$$

Решение. $3x^2 + 4x - 7 = 3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{25}{9} \right] = 3(v^2 - a^2),$

где $v = x + \frac{2}{3}$ и $a = \frac{5}{3}$. Тогда $dv = dx$. Значит,

$$\int \sqrt{3x^2 + 4x - 7} dx = \sqrt{3} \int \sqrt{v^2 - a^2} dv.$$

Применив XXI и восстановив $v = x + \frac{2}{3}$ и $a = \frac{5}{3}$, мы получим ответ.

ЗАДАЧИ

- $\int \sqrt{1-4x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4} \arcsin 2x + C.$
- $\int \sqrt{1+9x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+9x^2} + \frac{1}{6} \ln(3x + \sqrt{1+9x^2}) + C.$
- $\int \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} dx = \frac{x}{4} \sqrt{x^2 - 4} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + C.$
- $\int \sqrt{25-9x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6} \arcsin \frac{3x}{5} + C.$
- $\int \sqrt{4x^2+9} dx = \frac{x}{2} \sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$
- $\int \sqrt{5-3x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{5-3x^2} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \arcsin x \sqrt{\frac{3}{5}} + C.$
- $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + C.$
- $\int \sqrt{5-2x+x^2} dx = \frac{x-1}{2} \sqrt{5-2x+x^2} +$
 $+ 2 \ln(x-1 + \sqrt{5-2x+x^2}) + C.$
- $\int \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{x-1}{2} \sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + C.$
- $\int \sqrt{10-4x+4x^2} dx = \frac{2x-1}{4} \sqrt{10-4x+4x^2} +$
 $+ \frac{9}{4} \ln(2x-1 + \sqrt{10-4x+4x^2}) + C.$

Взять следующие интегралы и проверить дифференцированием результаты:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 11. $\int \sqrt{16-x^2} dx.$ | 16. $\int \sqrt{3+2x-x^2} dx.$ |
| 12. $\int \sqrt{9+16x^2} dx.$ | 17. $\int \sqrt{x^2+4x+13} dx.$ |
| 13. $\int \sqrt{x^2-7} dx.$ | 18. $\int \sqrt{9x^2-12x} dx.$ |
| 14. $\int \sqrt{25-36x^2} dx.$ | 19. $\int \sqrt{8+6x-9x^2} dx.$ |
| 15. $\int \sqrt{5-4x^2} dx.$ | 20. $\int \sqrt{4x-1-x^2} dx.$ |

§ 15. Тригонометрические дифференциалы. Рассмотрим теперь некоторые тригонометрические дифференциалы, часто встречающиеся и легко интегрируемые приведением к основным формулам путем простых тригонометрических преобразований.

1. Найти $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Если одно из чисел m и n есть положительное нечетное число, причем все равно, каково будет другое, то легко выполнить интегрирование посредством формулы (IV):

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

В самом деле, интеграл приводится к форме

$$\int (\text{члены, содержащие только } \cos x) \cdot \sin x dx,$$

если у $\sin x$ — показатель нечетный, и к форме

$$\int (\text{члены, содержащие только } \sin x) \cdot \cos x dx,$$

если у $\cos x$ — показатель нечетный. Поясним это примерами.

Пример 1. Найти $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int (\sin^2 x - 2 \sin^4 x + \sin^6 x) \cos x dx = \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2 \sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \cos^3 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \\ &= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$
2. $\int \cos^3 2\theta \sin 2\theta d\theta = -\frac{\cos^4 2\theta}{8} + C.$
3. $\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

$$4. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x} = \csc x - \frac{1}{3} \csc^3 x + C.$$

$$5. \int \frac{\sin^3 a da}{\cos^2 a} = \sec a + \cos a + C.$$

$$6. \int \sin^{\frac{3}{7}} \varphi \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{7}{10} \sin^{\frac{10}{7}} \varphi - \frac{7}{24} \sin^{\frac{24}{7}} \varphi + C.$$

$$7. \int \frac{\sin^6 y}{\sqrt{\cos y}} dy = -2 \sqrt{\cos y} \left(1 - \frac{2}{5} \cos^2 y + \frac{1}{9} \cos^4 y \right) + C.$$

$$8. \int \frac{\cos^5 t dt}{\sqrt[3]{\sin t}} = \frac{3}{2} \sin^{\frac{2}{3}} t \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 t + \frac{1}{7} \sin^4 t \right) + C.$$

2. Найти $\int \operatorname{tg}^n x dx$ или $\int \operatorname{ctg}^n x dx$.

Эти выражения легко интегрируются при n целом, почти по тому же плану, как и предыдущие примеры.

Пример. Найти $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \operatorname{tg}^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx - \\ &- \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\operatorname{tg} x)^2 d(\operatorname{tg} x) - \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C \end{aligned}$$

3. Найти $\int \sec^n x dx$ или $\int \csc^n x dx$.

Эти выражения интегрируются легко, когда n есть целое положительное четное число.

Пример. Найти $\int \sec^6 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \sec^6 x dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 \sec^2 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x dx + 2 \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + 2 \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

4. Найти $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$ или $\int \operatorname{ctg}^m x \csc^n x dx$.

Когда n есть положительное четное число, поступаем, как в примере 3.

Пример 1. Найти $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^6 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^8 x \sec^2 x dx + \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

Когда m — нечетное, можем поступить, как в следующем примере.

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. Найдти } \int \operatorname{tg}^5 x \operatorname{sc}^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^4 x \operatorname{sc}^3 x \operatorname{sc} x \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \int (\operatorname{sc}^2 x - 1)^2 \operatorname{sc}^2 x \operatorname{sc} x \operatorname{tg} x \, dx = \int (\operatorname{sc}^6 x - 2 \operatorname{sc}^4 x + \operatorname{sc}^2 x) \operatorname{sc} x \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{sc}^7 x}{7} - \frac{2 \operatorname{sc}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sc}^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln \cos x + C.$
2. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln \sin x + C.$
3. $\int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{3} \, dx = -\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3} + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + x + C.$
4. $\int \operatorname{ctg}^5 a \, da = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 a + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 a + \ln \sin a + C.$
5. $\int \operatorname{sc}^8 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$
6. $\int \operatorname{tg}^4 \varphi \operatorname{sc}^4 \varphi \, d\varphi = \frac{\operatorname{tg}^7 \varphi}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{5} + C.$
7. $\int \operatorname{tg}^3 \theta \operatorname{sc}^5 \theta \, d\theta = \frac{1}{7} \operatorname{sc}^7 \theta - \frac{1}{5} \operatorname{sc}^5 \theta + C.$
8. $\int \operatorname{ctg}^5 x \operatorname{csc}^4 x \, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8} + C.$
9. $\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x \operatorname{sc}^4 x \, dx = \frac{2 \operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} x}{5} + \frac{2 \operatorname{tg}^{\frac{9}{2}} x}{9} + C.$
10. $\int \operatorname{tg}^5 y \operatorname{sc}^{\frac{3}{2}} y \, dy = 2 \operatorname{sc}^{\frac{3}{2}} y \left(\frac{\operatorname{sc}^4 y}{11} - \frac{2 \operatorname{sc}^2 y}{7} + \frac{1}{3} \right) + C.$
11. $\int \frac{\operatorname{sc}^6 a \, da}{\operatorname{tg}^4 a} = \operatorname{tg} a - 2 \operatorname{ctg} a - \frac{\operatorname{ctg}^3 a}{3} + C.$
12. $\int (\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg}^4 z) \, dz = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 z + C.$
13. $\int (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^3 \, dt = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg}^2 t) + \ln \operatorname{tg}^2 t + C.$

5. Для нахождения интегралов типа $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, когда или m , или n есть нечетное положительное целое число, кратчайший способ указан в пункте 1 этого параграфа. Когда же m и n — оба четные положительные целые числа, данное дифференциальное выражение можно преобразовать посредством надлежащих тригономет-

рических подстановок в выражение, содержащее синусы и косинусы кратных углов, и затем интегрировать. Для этого служат формулы:

$$\begin{aligned}\sin u \cos u &= \frac{1}{2} \sin 2u; \\ \sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2u; \\ \cos^2 u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u.\end{aligned}$$

Пример 1. Найти $\int \cos^2 x \, dx$.

Решение.
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

Решение.
$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$.

Решение.
$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x \, dx = \\ &= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.\end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$

и

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \text{ если } m \neq n.$$

Решение.

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \sin (m+n)x + \frac{1}{2} \sin (m-n)x,$$

откуда

$$\begin{aligned}\int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin (m-n)x \, dx = \\ &= -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C.\end{aligned}$$

Подобно этому найдем:

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

ЗАДАЧИ

$$1. \int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$2. \int \cos^6 x dx = \frac{1}{16} \left(5x + 4 \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4} \sin 4x \right) + C.$$

$$3. \int \sin^4 t \cos^4 t dt = \frac{1}{128} \left(3t - \sin 4t + \frac{\sin 8t}{8} \right) + C.$$

$$4. \int \cos^6 x \sin^2 x dx = \frac{1}{128} \left(5x + \frac{8}{3} \sin^3 2x - \sin 4x - \frac{\sin 8x}{8} \right) + C.$$

$$5. \int \sin 5z \sin 6z dz = -\frac{\sin 11z}{22} + \frac{\sin z}{2} + C.$$

$$6. \int \cos 4s \cos 7s ds = \frac{\sin 11s}{22} + \frac{\sin 3s}{6} + C.$$

$$7. \int \cos \frac{3}{4} x \sin \frac{1}{4} x dx = -\frac{1}{2} \cos x + \cos \frac{1}{2} x + C.$$

§ 16. Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{a^2 - x^2}$ или $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, при помощи тригонометрических подстановок. В большом числе случаев при интегрировании выражений этого типа весьма быстро приводят к цели следующие подстановки:

| | | | |
|---------------------------|----------------------|--------------------|---------------------------------|
| для выражений, содержащих | $\sqrt{a^2 - x^2}$, | подстановка | $x = a \sin z$, |
| » | » | $\sqrt{a^2 + x^2}$ | » $x = a \operatorname{tg} z$, |
| » | » | $\sqrt{x^2 - a^2}$ | » $x = \frac{a}{\cos z}$. |

Можно воспользоваться также соответственно подстановками $x = a \cos z$, $x = a \operatorname{ctg} z$, $x = \frac{a}{\sin z}$.

Пример.
$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Решение. Положим $x = a \sin z$; тогда $dx = a \cos z dz$ и

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \cos z dz}{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C =$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

[Так как $\sin z = \frac{x}{a}$, то $\operatorname{tg} z = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$].

§ 17. О множественности ответов при интегрировании. Учащийся в первое время бывает немало смущен, видя, что самые разнообразные ответы на один и тот же неопределенный интеграл оказываются все одинаково верными, т. е. как будто мы имеем здесь *множественность* верных ответов. Легко, однако, понять причину этого кажущегося парадокса.

Возьмем самый простой пример:

$$\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C;$$

с другой стороны,

$$\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \, dx = 2 \int \sin x \, d \sin x = \sin^2 x + C.$$

Ответы как будто различные.

На самом деле ответы всегда тождественны между собой, и кажущееся различие ответов всегда вызывается различием произвольных постоянных в этих случаях, обозначенных тем же менее одной и той же буквой C.

Это легко обнаружить на приведенном случае. Действительно, из тригонометрии учащийся знает, что

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Различие произвольных постоянных (здесь на $\frac{1}{2}$) и создало здесь кажущееся различие самих ответов.

С обстоятельством подобного рода учащийся встречался уже в самом начале этой главы, в таблице основных интегралов, где одновременно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

Но из тригонометрических соотношений

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x \quad \text{и} \quad \sin y = x$$

следует:

$$\frac{\pi}{2} - y = \arccos x \quad \text{и} \quad y = \arcsin x,$$

откуда после сложения вытекает, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, мы видим, что произвольное постоянное C второго ответа равно произвольному постоянному первого ответа, увеличенному на $\frac{\pi}{2}$.

ЗАДАЧИ

1. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.$
2. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$
3. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C.$
5. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3x^3} + C.$
6. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C.$

§ 18. Интегрирование по частям. Если u и v суть функции одного независимого переменного, тогда по формуле дифференцирования произведения мы имеем:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Отсюда

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Интегрируя, мы находим:

$$\text{XXII.} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Полученная формула XXII позволяет нам проинтегрировать дифференциальное выражение $u dv$, если мы умеем выполнить интегрирования дифференциальных выражений dv и $v du$.

Этот метод *интегрирования по частям* есть излюбленный метод в интегральном исчислении.

Чтобы применить его в каком-нибудь данном случае, нужно уметь разбить заданное дифференциальное выражение на два множителя, именно: на u и на dv . Общих правил для этого, к сожалению, никаких нельзя дать, кроме:

- a) dx всегда должен быть частью dv ;
- b) надо уметь интегрировать dv ;

с) когда интегрируемое выражение есть произведение двух функций, тогда наиболее сложный множитель надо рассматривать как часть дифференциала dv .

Следующие примеры покажут, каким образом применяется на деле правило интегрирования по частям.

Пример 1. Найти $\int x \cos x \, dx$.

Решение. Пусть

$$u = x \text{ и } dv = \cos x \, dx,$$

откуда

$$du = dx \text{ и } v = \int \cos x \, dx = \sin x.$$

Подставляя в XXII, имеем:

$$\int \overbrace{x \cos x}^{\frac{u}{x} \frac{dv}{\sin x}} dx = \overbrace{x \sin x}^{\frac{u}{x} \frac{v}{\sin x}} - \int \overbrace{\sin x}^{\frac{v}{\sin x} \frac{du}{dx}} dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Найти $\int x \ln x \, dx$.

Решение. Пусть

$$u = \ln x \text{ и } dv = x \, dx,$$

откуда

$$du = \frac{dx}{x} \text{ и } v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Подставляя в XXII, имеем:

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x e^{ax} \, dx$.

Решение. Пусть

$$u = e^{ax} \text{ и } dv = x \, dx,$$

откуда

$$du = e^{ax} a \, dx \text{ и } v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}.$$

Подставляя в XXII, имеем:

$$\int x e^{ax} \, dx = e^{ax} \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^{ax} a \, dx = \frac{x^2 e^{ax}}{2} - \frac{a}{2} \int x^2 e^{ax} \, dx.$$

Но $x^2 e^{ax} \, dx$ интегрируется еще сложнее, чем $x e^{ax} \, dx$, а это показывает, что мы здесь выбрали наши множители не надлежащим образом. Положим вместо этого

$$u = x \text{ и } dv = e^{ax} \, dx,$$

откуда

$$du = dx \text{ и } v = \int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Подставляя в XXII, находим:

$$\int x e^{ax} \, dx = x \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \, dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C.$$

Может случиться, что формулу интегрирования по частям придется применять несколько раз, как в нижеследующем примере.

Пример 4. Найти $\int x^2 e^{ax} dx$.

Решение. Пусть

$$u = x^2 \quad \text{и} \quad dv = e^{ax} dx,$$

откуда

$$du = 2x dx \quad \text{и} \quad v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Подставляя в XXII, имеем:

$$\int x^2 e^{ax} dx = x^2 \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} 2x dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx. \quad (1)$$

Интеграл в последнем члене был уже найден в предыдущем примере с помощью интегрирования по частям:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right).$$

Подставляя этот результат в (1), имеем:

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2e^{ax}}{a^2} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right) + C.$$

Пример 5. Показать, что

$$\int \operatorname{sc}^3 z \, dz = \frac{1}{2} \operatorname{sc} z \operatorname{tg} z + \frac{1}{2} \ln (\operatorname{sc} z + \operatorname{tg} z) + C.$$

Решение. Полагаем

$$u = \operatorname{sc} z \quad \text{и} \quad dv = \operatorname{sc}^2 z \, dz,$$

тогда

$$du = \operatorname{sc} z \cdot \operatorname{tg} z \cdot dz \quad \text{и} \quad v = \operatorname{tg} z.$$

Подставив в XXII, имеем:

$$\int \operatorname{sc}^3 z \, dz = \operatorname{sc} z \cdot \operatorname{tg} z - \int \operatorname{sc} z \cdot \operatorname{tg}^2 z \cdot dz.$$

В новом интеграле подставляем $\operatorname{tg}^2 z = \operatorname{sc}^2 z - 1$. Это нам дает:

$$\int \operatorname{sc}^3 z \, dz = \operatorname{sc} z \cdot \operatorname{tg} z = \int \operatorname{sc}^3 z \, dz + \ln (\operatorname{sc} z + \operatorname{tg} z) + C.$$

Перенеся интеграл в левую часть и разделив на 2, мы имеем требуемый результат.

Пример 6. Показать, что

$$\int e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

Решение. Полагаем $u = e^{ax}$ и $dv = \sin nx \, dx$.

Тогда

$$du = a e^{ax} dx \quad \text{и} \quad v = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Подставляя в формулу XXII, имеем:

$$\int e^{ax} \sin nx \, dx = -\frac{e^{ax} \cos nx}{n} + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx \, dx. \quad (2)$$

Новый интеграл опять интегрируем по частям. Полагаем:

$$u = e^{ax} \quad \text{и} \quad dv = \cos nx \, dx.$$

Тогда

$$du = ae^{ax} \, dx \quad \text{и} \quad v = \frac{\sin nx}{n}.$$

Отсюда по формуле XXII мы получаем:

$$\int e^{ax} \cos nx \, dx = \frac{e^{ax} \sin nx}{n} - \frac{a}{n} \int e^{ax} \sin nx \, dx. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) суть система двух *алгебраических* уравнений с двумя неизвестными, каковыми являются интегралы $\int e^{ax} \sin nx \, dx$ и $\int e^{ax} \cos nx \, dx$. Уравнения эти *первой степени* относительно неизвестных интегралов и чрезвычайно просто решаются. Решая эти уравнения, мы тотчас же получаем наш неизвестный интеграл $\int e^{ax} \sin nx \, dx$ и еще раз, как своего рода прибыль от метода или побочный продукт, другой интеграл: $\int e^{ax} \cos nx \, dx$, который от нас не требовали, но который также полезен.

Среди наиболее важных применений метода интегрирования по частям является интегрирование:

- a) дифференциалов, содержащих произведения;
- b) дифференциалов, содержащих логарифмы;
- c) дифференциалов, содержащих обратные тригонометрические (круговые) функции.

ЗАДАЧИ

Выполнить следующие интегрирования:

1. $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C.$
2. $\int \ln x \, dx = x (\ln x - 1) + C.$
3. $\int x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$
4. $\int x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$
5. $\int x \sec^2 2x \, dx = \frac{1}{2} x \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{4} \ln \cos 2x + C.$
6. $\int x \sin^2 \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} \cos x + C.$

7. $\int x^2 \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$
8. $\int \sin x \cos 3x \, dx = \frac{1}{8} (3 \sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x) + C.$
9. $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$
10. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
11. $\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$
12. $\int \operatorname{arctg} y \, dy = y \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + C.$
13. $\int \arctg \frac{x}{3} \, dx = x \arctg \frac{x}{3} - \frac{3}{2} \ln(x^2+9) + C.$
14. $\int x^3 \arctg x \, dx = \frac{1}{4} (x^4-1) \arctg x + \frac{1}{12} (3x-x^3) + C.$
15. $\int \frac{\arctg x \, dx}{x^2} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\arctg x}{x} + C.$
16. $\int \ln(1-\sqrt{x}) \, dx = (x-1) \ln(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2} (x+2\sqrt{x}) + C.$
17. $\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x^2 - \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right) + C.$
18. $\int e^t \sin t \, dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C.$
19. $\int e^{\theta} \cos \theta \, d\theta = \frac{e^{\theta}}{2} (\sin \theta + \cos \theta) + C.$
20. $\int \frac{\sin \Phi \, d\Phi}{e^{\Phi}} = -\frac{\sin \Phi + \cos \Phi}{2e^{\Phi}} + C.$
21. $\int e^{3t} \cos 3t \, dt = \frac{e^{3t}}{13} (3 \sin 3t + 2 \cos 3t) + C.$
22. $\int e^{-\theta} \sin 3\theta \, d\theta = \frac{e^{-\theta}}{10} (\sin 3\theta + 3 \cos 3\theta) + C.$
23. $\int \frac{x e^x \, dx}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} + C.$
24. $\int \frac{x^2 \, dx}{e^x} = -\frac{x^2+2x+2}{e^x} + C.$

Взять каждый из следующих интегралов и проверить результаты дифференцированием:

25. $\int x \csc^2 3x \, dx.$

27. $\int x^2 \cos \frac{x}{2} \, dx.$

26. $\int x \cos^2 \frac{x}{2} \, dx.$

28. $\int \sin 3x \cos x \, dx.$

29. $\int \sin \theta \sin 3\theta \, d\theta.$

30. $\int \cos \Phi \cos 3\Phi \, d\Phi.$

31. $\int \arcsin 2x \, dx.$

32. $\int \arcsin \frac{2}{x} \, dx.$

33. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} \, dx.$

34. $\int x^3 \arcsin x \, dx.$

35. $\int \frac{x \arcsin x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

36. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x^3} \, dx.$

37. $\int x^3 e^{2x} \, dx.$

38. $\int (e^x + x)^3 \, dx.$

39. $\int (2x + x^2)^3 \, dx.$

40. $\int e^{3t} \cos 2t \, dt.$

41. $\int e^{\frac{t}{2}} \sin 2t \, dt.$

42. $\int e^{2t} \cos \frac{t}{2} \, dt.$

43. $\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} \, dt.$

44. $\int e^{\frac{t}{3}} \cos t \, dt.$

45. $\int e^{\frac{t}{2}} \sin t \, dt.$

46. $\int \csc^3 \theta \, d\theta.$

§ 19. Пояснение. Интегрирование, в целом, является действием более трудным, чем дифференцирование. В самом деле, каким бы простым ни казался (на первый взгляд) интеграл

$$\int \sqrt{x} \sin x \, dx,$$

его взять нельзя, ибо не существует никакой элементарной функции (т. е. являющейся комбинацией конечного числа¹ функции от функций, начиная с написанных в таблице дифференцирований), производная которой оказалась бы равной $\sqrt{x} \sin x$. Вся трудность интегрального исчисления заключается в невозможности сразу сказать, берется какой-то написанный интеграл или не берется. Чтобы помочь технике интегрирования, составлены специальные таблицы типов берущихся интегралов. При этом, открытие того или иного широкого класса берущихся интегралов всегда является результатом решения трудной научной проблемы.

¹ Число это может быть невообразимо огромным, например, исчисляющим триллионы операций «функции от функций».

ГЛАВА II

ПОСТОЯННАЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 20. Определение постоянной интегрирования из начальных условий. Как было выяснено в § 2, результат интегрирования содержит произвольную постоянную величину, т. е. задача нахождения первообразной функции по данной функции дает бесчисленное множество ответов. Однако многие задачи, решаемые при помощи интегрирования, требуют нахождения *одной определенной* первообразной функции, а так как все первообразные функции отличаются друг от друга только значением произвольной постоянной, то значит, нахождение определенной первообразной функции сводится к нахождению определенного значения произвольной постоянной. Очевидно, в таком случае нам должно быть известно значение интеграла для некоторого значения переменного. Поэтому условия задач такого рода, помимо дифференциального выражения, содержат еще и некоторые дополнительные данные. Поясним это примером.

Пример. Найти функцию, производная которой есть $3x^2 - 2x + 5$, причем значение функции должно равняться 12 при $x = 1$.

Решение. $(3x^2 - 2x + 5) dx$ есть данное дифференциальное выражение, которое нужно интегрировать. Имеем:

$$\int (3x^2 - 2x + 5) dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

где C — постоянная интегрирования. По условию задачи этот результат должен равняться 12 при $x = 1$, т. е.

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \text{ или } C = 7.$$

Искомая функция будет, следовательно, $x^3 - x^2 + 5x + 7$.

§ 21. Геометрическое значение постоянной интегрирования. Поясним примерами.

Пример 1. Найти уравнение кривой, в каждой точке которой угловой коэффициент касательной равен $2x$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке равен $\frac{dy}{dx}$, то по условию задачи имеем $\frac{dy}{dx} = 2x$, или $dy = 2x dx$. Интегрируя, находим:

$$y = 2 \int x dx, \text{ или } y = x^2 + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Если постоянной C дадим ряд значений, например 6, 0, -3 , то уравнение (1) даст:

$$y = x^2 + 6, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 3;$$

значит, наши кривые суть параболы, оси которых совпадают с осью OY , причем эти кривые отсекают на оси OY отрезки 6, 0, -3 .

Для всех парабол (1) (число их бесконечно велико) $\frac{dy}{dx}$ при заданном x имеет одну и ту же величину, т. е. направление их (или, что одно и то же, угловой коэффициент касательной) одинаково для одного и того же значения x . Легко также заметить, что у любых двух кривых разность ординат, соответствующих одному и тому же значению x , остается неизменной. Следовательно, можно получить все эти параболы, просто передвигая поступательно одну из них вверх или вниз на величину C , ибо в этом случае значение C на угловой коэффициент касательной не влияет (рис. 3).

Если в этом примере ввести добавочное условие, потребовав, например, чтобы кривая проходила через точку (1, 4), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (1), откуда $4 = 1 + C$, или $C = 3$. Следовательно, искомая, в этом частном случае единственная, кривая будет парабола $y = x^2 + 3$.

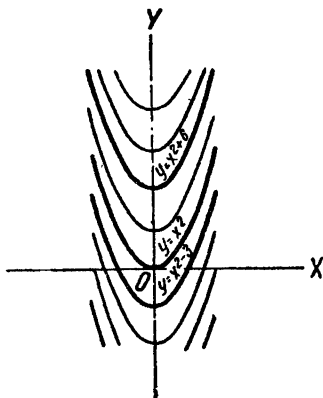


Рис. 3

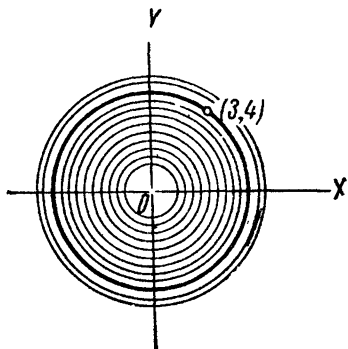


Рис. 4

Пример 2. Найти уравнение такой кривой, чтобы угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой точке равнялся отношению абсциссы к ординате со знаком минус.

Решение. Условие задачи выражается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

или, отделяя переменные (освобождаясь от знаменателей):

$$y \, dy = -x \, dx.$$

Интегрируя, найдем

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

или

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Уравнение представляет совокупность всех концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 4).

Если бы в начале было дано дополнительное условие, чтобы кривая проходила через точку (3, 4), то мы имели бы:

$$9 + 16 = 2C.$$

Следовательно, уравнение требуемой кривой в этом частном случае представляет окружность $x^2 + y^2 = 25$.

§ 22. Физическое значение постоянной интегрирования. Поясняем примерами.

Пример 1. Найти закон движения точки, движущейся по прямой с постоянным ускорением.

Решение. Так как ускорение $\left[\text{равное } \frac{dv}{dt} \right]$ постоянное, например, равное j , то будем иметь:

$$\frac{dv}{dt} = j, \text{ или } dv = j dt.$$

Интегрируя, найдем:

$$v = jt + C. \quad (2)$$

Для определения C положим, что начальная скорость равна v_0 , т. е. пусть $v = v_0$ при $t = 0$. Подстановка во (2) дает:

$$v_0 = 0 + C, \text{ или } C = v_0.$$

Следовательно, уравнение (2) примет вид:

$$v = jt + v_0. \quad (2^*)$$

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то из (2*) найдем:

$$\frac{ds}{dt} = jt + v_0, \text{ или } ds = jt dt + v_0 dt.$$

Интегрируя, получаем:

$$s = \frac{1}{2} jt^2 + v_0 t + C. \quad (3)$$

Для определения C положим, что начальное положение (равное расстоянию при $t = 0$) будет s_0 , т. е. пусть $s = s_0$ при $t = 0$. Подстановка этих значений в (3) дает:

$$s_0 = 0 + 0 + C, \text{ или } C = s_0.$$

Следовательно, уравнение (3) примет вид:

$$s = \frac{1}{2} jt^2 + v_0 t + s_0. \quad (3^*)$$

Положив $j = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$ в (2*) и (3*), найдем закон движения падающего тела в пустоте, когда оно выходит из состояния покоя, именно

$$v = gt \text{ и } h = \frac{1}{2} gt^2.$$

Пример 2. Исследовать движение материальной точки, брошенной с начальной скоростью v_0 , образующей угол α с горизонтом, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Решение. Пусть движение происходит в плоскости XOY (рис. 5). Предположим также, что в начальный момент точка находится в начале координат.

Пусть на материальную точку действует только тяжесть. Тогда ускорение в горизонтальном направлении будет нуль, в вертикальном оно будет g .

Имеем:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

Интегрируя, найдем:

$$v_x = C_1 \quad \text{и} \quad v_y = -gt + C_2.$$

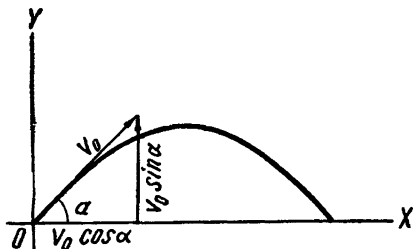


Рис. 5

Но горизонтальная и вертикальная проекции начальной скорости соответственно равны $v_0 \cos \alpha$ и $v_0 \sin \alpha$; следовательно, (положив $t = 0$):

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha;$$

откуда

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = -gt + v_0 \sin \alpha. \quad (4)$$

Далее по формулам (2), (3), часть I, § 107 имеем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt};$$

следовательно, (4) дает:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha,$$

или

$$dx = v_0 \cos \alpha \, dt, \quad dy = -gt \, dt + v_0 \sin \alpha \, dt.$$

Интегрируя, найдем:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_3, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + C_4. \quad (5)$$

Для определения C_3 и C_4 замечаем, что $x = 0$ и $y = 0$ при $t = 0$. Подстановка в уравнения (5) дает: $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$. Отсюда

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t.$$

Эти уравнения дают законы движения проекций материальной точки на координатные оси; с геометрической точки зрения их совокупность представляет собой параметрические уравнения траектории движения, исключая из которых параметр (время) t , получим:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

уравнение траектории в декартовой форме, показывающее, что точка опишет параболу.

ЗАДАЧИ

1. Найти функцию, первая производная которой равна:

а) $3 + x - 5x^2$, зная, что при $x = 6$ функция равна -200 .

$$\text{Отв. } 124 + 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3.$$

б) $y^3 - b^2y$, зная, что при $y = 2$ функция равна нулю.

$$\text{Отв. } \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}b^2y^2 + 2b^2 - 4.$$

с) $\sin \alpha + \cos \alpha$, зная, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ функция равна 2.

$$\text{Отв. } \sin \alpha - \cos \alpha + 1.$$

д) $\frac{1}{t} - \frac{1}{2-t}$, зная, что при $t = 1$ функция равна нулю.

$$\text{Отв. } \ln(2t - t^2).$$

е) $\sec^2 \theta + \operatorname{tg} \theta$, зная, что при $\theta = 0$ функция равна 5.

$$\text{Отв. } \operatorname{tg} \theta - \ln \cos \theta + 5.$$

2. Найти уравнение кривой, поднормаль которой постоянна и равна $2a$.

[По § 72, часть I, поднормаль равна $y \frac{dy}{dx}$].

$$\text{Отв. Парабола } y^2 = 4ax + C.$$

3. Найти кривую, у которой подкасательная постоянна и равна a .

[По § 72, часть I, подкасательная равна $y \frac{dx}{dy}$].

$$\text{Отв. } a \ln y = x + C.$$

4. Найти кривую, у которой поднормаль равна абсциссе точки касания.

$$\text{Отв. } y^2 - x^2 = C, \text{ равносторонняя гипербола.}$$

5. Найти кривую, у которой нормаль постоянна ($= R$), полагая, что $y = h$ при $x = 0$.

[По § 72, часть I, длина нормали равна $y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, поэтому в рассматриваемом случае $dx = \pm (R^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y dy$].

$$\text{Отв. Окружность } x^2 + y^2 = R^2.$$

6. Найти кривую, подкасательная которой втрое больше абсциссы точки касания.

$$\text{Отв. } x^2 = cy^3.$$

7. Показать, что кривая, у которой полярная подкасательная [см. § 110, часть I] имеет постоянную величину, есть гиперболическая спираль.

8. Показать, что кривая, у которой полярная поднормаль [см. § 110, часть I] постоянна, есть архимедова спираль.

9. Найти кривую, у которой полярная поднормаль пропорциональна длине радиуса-вектора.

$$\text{Отв. } \rho = ce^{a\theta}.$$

10. Найти кривую, у которой полярная поднормаль пропорциональна синусу полярного угла.

$$\text{Отв. } \rho = c - a \cos \theta.$$

11. Найти кривую, у которой полярная подкасательная пропорциональна длине радиуса-вектора.

$$\text{Отв. } \rho = ce^{a\theta}.$$

12. Определить кривую, у которой полярная подкасательная находится в постоянном отношении к полярной поднормали.

$$\text{Отв. } \rho = ce^{a\theta}.$$

13. Найти уравнение кривой, у которой угол между радиусом-вектором и касательной составляет половину полярного угла. [Обозначая угол между радиусом-вектором и касательной через ψ , имеем: $\operatorname{tg} \psi = \rho : \frac{d\rho}{d\theta}$].

Отв. $\rho = c(1 - \cos \theta)$.

14. Полагая, что при $t = 0$ скорость $v = v_0$, найти соотношение между v и t , зная, что ускорение равно: а) нулю, б) постоянному j , в) $a + bt$.

Отв. а) $v = v_0$, б) $v = v_0 + jt$, в) $v = v_0 + at + \frac{1}{2}bt^2$.

15. Полагая, что $s = 0$, при $t = 0$, найти соотношение между s и t , зная, что скорость равна: а) постоянному ($= v_0$), б) $m + nt$, в) $3 + 2t - 3t^2$.

Отв. а) $s = v_0 t$, б) $s = mt + \frac{1}{2}nt^2$, в) $s = 3t + t^2 - t^3$.

16. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/сек по истечении t секунд. а) Как далеко будет оно отстоять от точки выхода, спустя 3 секунды? б) Во сколько времени пройдет оно 360 м, считая от точки выхода?

Отв. а) 45 м, б) 6 сек.

17. Тело выходит из точки O , и спустя t секунд скорость его в направлении оси OX равна $12t$, а в направлении оси OY равна $4t^2 - 9$. Найти расстояния, пройденные параллельно каждой оси, и уравнение траектории.

Отв. $x = 6t^2$; $y = \frac{4}{3}t^3 - 9t$; $y = \left(\frac{2}{9}x - 9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}$.

18. Тело движется таким образом, что скорости его по направлениям осей OX и OY равны соответственно kx и $-ky$. Показать, что траекторией его служит равносторонняя гипербола.

ГЛАВА III

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 23. Понятие определенного интеграла. Настоятельно указывая учащемуся на необходимость возвратиться к главе I и перечислять три параграфа: § 3, § 4 и § 5, где были даны подробные разъяснения, касающиеся определенного интеграла, мы приводим здесь краткое напоминание сути дела.

Во-первых, у каждой непрерывной функции $\Phi(x)$ имеется первообразная функция $f(x)$, т. е. такая, которая при дифференцировании даст $\Phi(x)$, $f'(x) = \Phi(x)$. Нужды нет, что не всегда мы эту первообразную умеем отыскать, и нет нужды, что эта первообразная не всегда даже и выразима через элементарные функции¹, — она все-таки *всегда существует*.

Во-вторых, у каждой непрерывной функции $\Phi(x)$ имеется не одна первообразная $f(x)$, но бесчисленное множество, причем все они отличаются друг от друга на постоянную величину.

В-третьих, приращение $f(b) - f(a)$, получаемое любой первообразной при переходе ее аргумента от значения a к значению b , *одинаково* для всех первообразных и, значит есть *величина постоянная*, совсем не зависящая от взятой первообразной $f(x)$, а зависящая только от самой *производной* $\Phi(x)$, да еще от значений a и b .

Это приращение $f(b) - f(a)$ первообразных, одинаковое у всех них, и называется **определенным интегралом**.

Временно мы обозначали определенный интеграл через I_a^b ; не надо забывать, что определенный интеграл есть *просто число*.

§ 24. Теоретическое вычисление определенного интеграла. Раз определенный интеграл I_a^b зависит от производной $\Phi(x)$ и

¹ Даже в случае очень простых $\Phi(x)$, каковы, например, e^{x^2} , $\sqrt{x} \sin x$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и т. д., первообразные не выразимы ни через какие элементарные функции.

от чисел a и b , то он должен как-то через них вычисляться. Это вычисление и было указано в виде следующего четырехчленного общего правила нахождения определенных интегралов.

Первый шаг. Разделить отрезок $[a, b]$ на n отрезков, длины которых (считая по порядку от точки a к точке b) суть: $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$.

Второй шаг. В каждом из этих отрезков выбрать произвольным образом по одной точке $\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{n-1}^*$.

Третий шаг. Для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ составить парное произведение $\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i$ величины $\Phi(\xi_i^*)$ данной производной $\Phi(x)$ в выбранной точке ξ_i^* на длину Δx_i этого отрезка и все получившиеся n парных произведений сложить.

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \Phi(\xi_2^*)\Delta x_2 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}.$$

Четвертый шаг. Найти предел составленной таким образом суммы и парных произведений, когда n безгранично увеличивается и когда наибольшая из длин Δx_i стремится к нулю как к пределу. Этот предел и будет искомым определенным интегралом I_a^b .

§ 25. Фактическое вычисление определенного интеграла. В указанном виде вычисление определенных интегралов имеет только часто теоретическое значение, никогда на деле не осуществляемое. Ибо, за исключением трех или четырех редчайших случаев, мы не умеем отыскивать прямо пределы указанных сумм. Поэтому в действительности идут как раз обратным путем, при котором для вычисления определенного интеграла I_a^b не бывает нужно производить никакого перехода к пределу.

Соответствующее практическое правило вычисления определенных интегралов таково.

Первый шаг. Постараться отыскать для заданной производной $\Phi(x)$ какую-нибудь ее первообразную $f(x)$. Эти поиски сводятся к отысканию неопределенного интеграла $\int \Phi(x)dx$ и, вообще, не требуют никакого перехода к пределу, ибо ведутся формальным способом, или даже чисто алгебраически.

Второй шаг. Найдя неопределенный интеграл $\int \Phi(x)dx$ и, значит, какую-нибудь первообразную $f(x)$ для $\Phi(x)$, составить разность $f(b) - f(a)$.

Эта разность $f(b) - f(a)$ и будет определенным интегралом I_a^b , т. е. тем пределом суммы $\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$, для разыскания которого у нас, вообще, нет никаких других средств.

§ 26. **Обозначение определенного интеграла.** Если у нас нет никаких средств *прямого* вычисления определенного интеграла I_a^b как предела суммы

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}$$

и если, за неимением таковых, приходится довольствоваться таким *косвенным* способом, каким является использование неопределенного интеграла $\int \Phi(x)dx$, далеко не всегда берущегося, но тем не менее очень важно рассматривать пределы указанных сумм, *во-первых*, в целях приложения к естествознанию и, *во-вторых*, в целях приближенного их вычисления.

Имея это в виду, начинают с того, что дают *удобное обозначение* определенному интегралу I_a^b .

Учащийся уже знает, что точки $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*$ можно выбирать *произвольным образом* на тех n отрезках, на которые разбит основной отрезок $[a, b]$. Поэтому можно за эти точки взять те самые точки x_1, x_2, \dots, x_{n-1} деления, при помощи которых разбивают отрезок $[a, b]$, и где ради однообразия обозначений полагают $a = x_0$ и $b = x_n$. В этом случае предыдущая сумма напишется в виде:

$$\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Эту сумму обычно пишут в сжатом виде:

$$\sum_{x_i=a}^{x_i=b} \Phi(x_i)\Delta x_i,$$

где член $\Phi(x_i)\Delta x_i$ есть *общий член* суммы и где точка x_i , развертывающая член за членом всю эту сумму, берется, начиная с точки $x_0 = a$ и кончая последней точкой x_{n-1} , чрезвычайно близкой к точке $x_n = b$. Поэтому указанную *конечную сумму*, называемую часто «*интегральной суммой*», пишут в виде:

$$\sum_a^b \Phi(x_i)\Delta x_i, \quad \text{или даже} \quad \sum_a^b \Phi(x)\Delta x,$$

где подразумевается, что буква x , стоящая за знаком \sum суммы, пробегает отнюдь не все точки отрезка $[a, b]$ непрерывным образом, но лишь те его *точки деления* x_i , при помощи которых он разбит на отрезки: таких точек имеется всего n , начиная с x_0 .

Сам же определенный интеграл I_a^b , являющийся *пределом* конечной суммы $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$, пишут в виде

$$\int_a^b \Phi(x) dx$$

и читают «*определенный интеграл от а до b эф икс дэ икс*».

Необходимо указать со всей настойчивостью, что определенный интеграл $I_a^b = \int_a^b \Phi(x) dx$ отнюдь не есть никакая сумма, но лишь *предел* суммы:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \lim \sum_a^b \Phi(x) \Delta x.$$

§ 27. Основная формула Лейбница — Ньютона и условие ее применимости.

Из того, что выше было сказано о величине $f(b) - f(a)$ определенного интеграла $I_a^b = \int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a)$, следует основная формула Лейбница — Ньютона:

$$\text{XXIII.} \quad \int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a),$$

которая читается так:

определенный интеграл от неопределенной функции $\Phi(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен разности $f(b) - f(a)$ значений в концах этого отрезка какой-нибудь первообразной для $\Phi(x)$.

Для практического вычисления определенных интегралов удобно применять одно обозначение. Именно, имея какое-нибудь выражение $F(x)$, содержащее переменное x , часто встречающуюся разность $F(b) - F(a)$ удобно писать сокращенно в виде $[F(x)]_a^b$.

Таким образом, мы имеем:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Поэтому формулу Лейбница — Ньютона можно теперь написать в виде:

$$\text{XXIII*}. \quad \int_a^b \Phi(x) dx = \left[\int \Phi(x) dx \right]_a^b = [f(x)]_a^b.$$

Этим обозначением и пользуются при практическом вычислении.

Заметим, что при вычислении определенных интегралов не стоит заботиться о выборе произвольной постоянной, ибо она все равно всегда автоматически исчезает при вычитании.

Пример 1. Найти $\int_1^4 x^3 dx$.

Решение. $\int_1^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^4 = \frac{64}{4} - \frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}.$

Пример 2. Найти $\int_0^\pi \sin x dx$.

Решение. $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = [-(-1)] - (-1) = 2.$

Пример 3. Найти $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

Решение. $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{1}{a} \arctg 1 -$
 $-\frac{1}{a} \arctg 0 = \frac{\pi}{4a} - 0 = \frac{\pi}{4a}.$

Пример 4. Показать, что $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = -\frac{1}{12} \ln 5 \approx -0,134.$

Решение. Сравнивая с XVII или с XVII*, мы полагаем: $v = 2x$, $a = 3$, $dv = 2dx$. Имеем:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = \frac{1}{12} \left[\ln \frac{2x - 3}{2x + 3} \right]_{-1}^0 \quad \text{по XVII}$$

и

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9} = - \int_{-1}^0 \frac{dx}{9 - 4x^2} = -\frac{1}{12} \left[\ln \frac{3 + 2x}{3 - 2x} \right]_{-1}^0. \quad \text{по XVII*}$$

Следует употребить последнее равенство, а не первое, ибо в первом встречаются логарифмы отрицательных чисел. Применение же формулы XVII* дает ответ.

Важнейшая из всех формул — формула Лейбница — Ньютона — существенно предполагает, что функция $\Phi(x)$ непрерывна на всем отрезке $[a, b]$ и, значит, не имеет на этом отрезке никаких особенностей, и в частности, ни уходов в бесконечность, ни, вообще, каких-либо точек разрыва.

Если же этого не принимать во внимание и если начать применять формулу Лейбница — Ньютона, не соблюдая этой осторожности, то тогда легко прийти к *грубейшим ошибкам* и к *неверным цифрам* в чисто технических вопросах.

Пример такой ошибки. Учащийся хочет вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$, но не обращает внимания на то, что подынтегральная функция $\Phi(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ уходит в бесконечность на отрезке $[1, 3]$. Ибо имеем, очевидно, $\Phi(x) \rightarrow +\infty$, когда $x \rightarrow 2$. Намереваясь применить формулу Лейбница — Ньютона, он пишет неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$ и находит, что он равен $\frac{1}{2-x} + C$. Наконец, положив $f(x) = \frac{1}{2-x}$, он пишет:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = f(3) - f(1) = \frac{1}{2-3} - \frac{1}{2-1} = -1 - 1 = -2.$$

Ясно, что произошла ошибка, ибо подынтегральная функция $\Phi(x)$ везде *положительна*. Поэтому интегральная сумма $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$, при $a < b$, должна быть положительной и, значит, ее предел тоже должен быть *положительным* или *равным нулю*. Отрицательной же величиной он быть никак не может¹.

Ошибка произошла от незаконного применения формулы XXIII Лейбница — Ньютона, которая всегда предполагает непрерывность функции $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

§ 28. Взаимоотношение определенного и неопределенного интегралов.

Зная неопределенный интеграл $\int \Phi(x) dx = f(x) + C$, мы легко вычисляем определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ при любых пределах a и b . Об этом нам говорит формула Лейбница — Ньютона:

$$\text{XXIII.} \quad \int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a).$$

¹ Ошибку такого же характера мы сделаем, применив формулу суммы членов геометрической прогрессии $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$ к случаю $x=2$, где эта формула уже незаконна. Ибо мы тогда получим: $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$. Сумма положительных чисел не может быть отрицательной величиной.

Наоборот, зная определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ при любых пределах a и b , мы легко получим неопределенный интеграл $\int \Phi(x) dx$ при помощи той же самой формулы Лейбница—Ньютона.

Действительно, обозначив переменное интегрирования в определенном интеграле $\int_a^b \Phi(x) dx$ какой-нибудь другой буквой, например буквой t , мы можем переписать формулу Лейбница—Ньютона в виде:

$$\int_a^b \Phi(t) dt = f(b) - f(a).$$

Переменив теперь букву b на букву x , мы имеем:

$$\int_a^x \Phi(t) dt = f(x) - f(a). \quad (1)$$

Рассматривая нижний предел a как величину постоянную, а верхний предел x как независимое переменное, мы видим, что первая часть равенства (1) есть *первообразная функция* для подынтегральной функции $\Phi(x)$, ибо имеем:

$$\frac{df(x)}{dx} = \Phi(x) \quad (2)$$

и, значит, дифференцируя обе части равенства (1) по букве x , находим:

$$\text{XXIV.} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x \Phi(t) dt = \Phi(x).$$

Отсюда ясно, что, прибавив к $\int_a^x \Phi'(t) dt$ произвольное постоянное C , мы получаем неопределенный интеграл для функции $\Phi(x)$, т. е. имеем равенство:

$$\text{XXV.} \quad \int \Phi(x) dx = \int_a^x \Phi(t) dx + C.$$

Замечательную эту формулу читают:

неопределенный интеграл есть сумма определенного интеграла с переменным верхним пределом и постоянным нижним плюс прибавочное произвольное постоянное.

§ 29. Переменное интегрирования в определенном и в неопределенном интегралах.

Буква x , стоящая под знаком интеграла в определенном и в неопределенном интегралах

$$\int_b^a \Phi(x) dx \quad \text{и} \quad \int \Phi(x) dx,$$

носит в обоих случаях одинаковое название *переменного интегрирования*. Однако ее роль в обоих интегралах совершенно различная.

В определенном интеграле самый численный результат нисколько не зависит от переменного интегрирования. В самом деле, здесь роль буквы x чисто служебная, такая же, например, как роль

буквы i , когда мы хотим найти сумму чисел $\sum_{i=1}^{i=100} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$. Определенный интеграл есть *число*, от переменного интегрирования не зависящее. Поэтому, в определенном интеграле переменное интегрирования можно обозначать какой угодно буквой. Таким образом, имеем:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b \Phi(t) dt = \int_a^b \Phi(z) dz \quad \text{и т. д.}$$

В неопределенном же интеграле переменное интегрирования является вместе с тем и независимым переменным, т. е. *аргументом* функции, получающейся после взятия интеграла. Поэтому *переменное интегрирования нельзя обозначать различными буквами в неопределенном интеграле*, ибо тогда будут получаться разные результаты, т. е. функции разных аргументов. Так, например, имеем:

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \cos t dt = \sin t + C,$$

$$\int \cos z dz = \sin z + C.$$

§ 30. Перестановка пределов интегрирования.

Так как

$$\int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a)$$

и

$$\int_b^a \Phi(x) dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)],$$

то отсюда заключаем:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = - \int_b^a \Phi(x) dx.$$

Словесно: *перестановка пределов интегрирования равносильна перемене знака определенного интеграла.*

§ 31. Разбиение отрезка интегрирования. Пусть $[a, b]$ есть отрезок, по которому интегрируют какую-нибудь непрерывную функцию $\Phi(x)$, и пусть этот отрезок разбит на два отрезка $[a, c]$ и $[c, b]$ какой-нибудь точкой c , находящейся внутри первоначального отрезка $[a, b]$.

Имеем:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a), \quad \int_a^c \Phi(x) dx = f(c) - f(a)$$

и

$$\int_c^b \Phi(x) dx = f(b) - f(c). \quad (1)$$

Складывая два последние равенства, имеем:

$$\int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a). \quad (2)$$

Значит:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx. \quad (3)$$

Словесно:

если разбивают отрезок интегрирования $[a, b]$ на несколько других отрезков, то интеграл по целому отрезку равен сумме интегралов по этим частным отрезкам¹.

§ 32. Два простейшие свойства определенных интегралов.

1. *Определенный интеграл от суммы равен сумме определенных интегралов от ее слагаемых.*

Доказательство. Имеем:

$$\int (u + v - w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx.$$

¹ Следует заметить, что формула (3) верна всегда, даже если точка c не будет лежать между пределами a и b интегрирования, ибо равенства (1) и (2) остаются в силе и в этом случае; следовательно, сохраняется и равенство (3), вытекающее из них.

Отсюда

$$\begin{aligned} \left[\int (u + v - w) dx \right]_a^b &= \left[\int u dx + \int v dx - \int w dx \right]_a^b = \\ &= \left[\int u dx \right]_a^b + \left[\int v dx \right]_a^b - \left[\int w dx \right]_a^b. \end{aligned}$$

И так как всегда

$$\text{XXIII*} \quad \int_a^b \Phi(x) dx = \left[\int \Phi(x) dx \right]_a^b,$$

то имеем окончательно:

$$\int_a^b (u + v - w) dx = \int_a^b u dx + \int_a^b v dx - \int_a^b w dx.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.*

Доказательство. Имеем:

$$\int Au dx = A \int u dx, \quad \text{где } A — \text{постоянное.}$$

Отсюда

$$\left[\int Au dx \right]_a^b = \left[A \int u dx \right]_a^b = A \cdot \left[\int u dx \right]_a^b.$$

Поэтому в силу XXIII* имеем окончательно:

$$\int_a^b Au dx = A \int_a^b u dx.$$

§ 33. Определенное интегрирование по частям.

Имеем: $(uv)' = uv' + u'v$. Отсюда

$$\int_a^b (uv' + u'v) dx = [uv]_a^b.$$

Следовательно,

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx.$$

И так как $v' dx = dv$ и $u' dx = du$, то имеем окончательно:

$$\text{XXVI} \quad \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Это и есть *правило определенного интегрирования по частям.*

§ 34. Определенное интегрирование подстановкой.

Это правило требует внимания и осторожности.

Пусть $f(x)$ функция непрерывна на отрезке $[A, B]$.

Положим

$$x = \varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ такова, что для нее соблюдены следующие условия:

во-первых, функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$, и

во-вторых, численные значения функции $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ не выходят за пределы отрезка $[A, B]$.

Обозначим через a и b соответственно величины функции $x = \varphi(t)$ в концах отрезка $[t_1, t_2]$, т. е. положим

$$a = \varphi(t_1) \quad \text{и} \quad b = \varphi(t_2).$$

При указанных свойствах функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ мы имеем формулу:

$$\text{XXVII.} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot dt.$$

Эта формула и выражает собой важное правило преобразования определенного интеграла подстановкой.

Доказательство этого правила.

Рассмотрим две функции переменного t :

$$\int_a^{\varphi(t)} f(y) dy \quad \text{и} \quad \int_{t_1}^t f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz$$

и найдем производные от той и другой по переменному t . Дифференцировать первую функцию приходится по правилу производной функции от функции, ибо ее можно написать в виде

$$\int_a^x f(y) dy, \quad \text{где} \quad x = \varphi(t).$$

Дифференцируя по t , имеем:

$$\frac{d \int_a^x f(y) dy}{dt} = \frac{d \int_a^x f(y) dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad [\text{по XXIV}] = f(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t).$$

Дифференцируя же по t вторую функцию, мы имеем прямо по формуле XXIV:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_1}^t f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

Следовательно, производные обеих функций оказались равными друг другу везде на отрезке $[t_1, t_2]$. Значит, на этом отрезке обе функции отличаются одна от другой лишь на некоторую постоянную величину C_0 .

Значит, имеем тождество на отрезке $[t_1, t_2]$:

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x) dx = \int_{t_1}^t f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz + C_0. \quad (1)$$

Чтобы вычислить постоянное C_0 , положим $t = t_1$. Имеем:

$$\int_a^{\varphi(t_1)} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_1} f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz + C_0,$$

но $\varphi(t_1) = a$. И так как *определенный интеграл между равными пределами всегда есть нуль*, то имеем:

$$\int_a^{\varphi(t_1)} f(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{t_1}^{t_1} f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz = 0.$$

Отсюда предыдущее равенство пишется так: $0 = 0 + C_0$. Значит, постоянное $C_0 = 0$. Поэтому вместо (1) имеем на $[t_1, t_2]$ тождество:

$$\int_a^{\varphi(t)} f(x) dx = \int_{t_1}^t f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) \cdot dz.$$

Полагая $t = t_2$ и вспоминая, что $\varphi(t_2) = b$, мы имеем окончательно:

$$\text{XXVII.} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot dt.$$

А это и есть правило определенного интегрирования подстановкой.

Чтобы выразить это правило словесно, вспомним, что

$$\varphi'(t) dt = d\varphi(t).$$

Поэтому первая часть равенства XXVII напишется в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)] d\varphi(t).$$

Наконец, вспомнив, что при подстановке функция $\varphi(t)$ была обозначена одной буквой x :

$$x = \varphi(t),$$

мы можем написать правую часть равенства XXVII просто в виде $\int_{t_1}^{t_2} f(x) dx$. Таким образом, все равенство XXVII перепишется в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Но здесь нужно большое внимание. В *левой части* этого равенства переменным интегрирования является буква x ; в соответствии с этим пределы интегрирования поставлены при левом знаке определенного интеграла такие, которые служат границами для *этого* переменного интегрирования. В *правой части* рассматриваемого равенства переменным интегрирования является отнюдь не переменное x , но уже переменное t , ибо буква x здесь обозначает *функцию* буквы t , $x = \varphi(t)$; в соответствии с этим и пределы интегрирования поставлены при правом знаке определенного интеграла такие, которые служат границами для этого *нового* переменного интегрирования t .

Таким образом, равенство (2), выражающее самую сущность правила XXVII определенного интегрирования подстановкой, должно читаться так:

при определенном интегрировании пределы всякий раз нужно ставить только такие, которые являются границами того переменного, которое выбирается за истинное переменное интегрирования.

Пример. Определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$, ибо $\int \cos x dx = \sin x + C$, и, значит, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$. Если же мы сделаем подстановку $x = t^2$, то, приняв во внимание, что $dx = 2t dt$, мы должны пределы t_1 и t_2 у определенного интеграла $\int_{t_1}^{t_2} 2t \cos t^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ поставить не прежние 0 и $\frac{\pi}{2}$, а такие, чтобы $0 = t_1^2$ и $\frac{\pi}{2} = t_2^2$; это означает,

что $t_1 = 0$ и $t_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Таким образом, имеем равенство¹:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2t \cos t^2 \, dt.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить нижеследующие интегралы, применяя указанные подстановки:

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 4 - 2 \ln 3.$ Положить $\sqrt{x} = z.$

2. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$ Положить $x = az.$

3. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 1.$ Положить $\sqrt{1 - x^2} = z.$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos^3 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{3}.$ Положить $\sin \alpha = z.$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin \theta + \cos \theta) \, d\theta}{3 + \sin 2\theta} = \frac{\ln 3}{4}.$ Положить $\sin \theta - \cos \theta = z.$

¹ С пределами t_0 и t_1 при интегрировании подстановкой $x = \varphi(t)$ приходится соблюдать осторожность, как это явствует из примера: имеем, оче-

видно: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2$, ибо $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ и, значит,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$$

Но, при подстановке $x = t^2$, мы имеем пределы t_0 и t_1 , дающиеся равенствами $-\frac{\pi}{2} = t_0^2$, $+\frac{\pi}{2} = t_1^2$. Предел t_0 получился *мнимый*, ибо всякое действительное число t_0 , возведенное в квадрат, даст положительный результат, а не отрицательный. Во избежание подобных недоразумений, надо заранее смотреть, чтобы пределы a и b соответствовали концам t_0 и t_1 действительного отрезка $[t_0, t_1]$.

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

Положить $e^x = z$.

$$7. \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \pi.$$

Положить $x = a \sin^2 z$.

$$8. \int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}} dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} = 8 + \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \pi.$$

Положить $x - 2 = z^3$.

$$9. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = 4 - \pi.$$

Положить $e^x - 1 = z^2$.

$$10. \int_1^4 \frac{y dy}{\sqrt{2+4y}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Положить $2 + 4y = z$.

$$11. \int_0^{\pi} \frac{dt}{3 + 2 \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Положить $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = z$.

$$12. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Положить $e^x - 1 = z^2$.

$$13. \int_0^a y^2 \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Положить $y = a \sin z$.

Проверить следующие интегрирования:

$$14. \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

$$19. \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx = \frac{a^2}{6}.$$

$$15. \int_6^2 \sqrt{x-2} dx = \frac{16}{3}.$$

$$20. \int_0^2 y^2 \sqrt{1+y^3} dy = \frac{52}{9}.$$

$$16. \int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx = \frac{98}{3}.$$

$$21. \int_0^4 \sqrt{x^2+9} dx = 10 + \frac{9}{2} \ln 3.$$

$$17. \int_0^2 \sqrt{25-3x} dx = \frac{122}{9}.$$

$$22. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

$$18. \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{5-t}} = 2.$$

$$23. \int_0^1 \frac{dx}{9x^2+6x+1} = \frac{1}{4}.$$

$$24. \int_0^1 te^t dt = 1.$$

$$25. \int_0^\pi e^\theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

$$26. \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}.$$

$$27. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sech} \theta d\theta = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}} \sin 2\theta d\theta = 0,429 \dots$$

$$29. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$30. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

$$31. \int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} = 4\pi.$$

Найти определенные интегралы:

$$32. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$33. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy.$$

$$34. \int_0^1 \sin \pi \theta d\theta.$$

$$35. \int_0^\pi \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

$$36. \int_0^4 \frac{x dx}{x^2+2}.$$

$$37. \int_0^\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} d\theta.$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta.$$

$$39. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{25-4x^2}}.$$

$$40. \int_{-1}^2 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$$

$$41. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

§ 35. Теорема о среднем. Пусть функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и пусть $f(x)$ есть первообразная для $\Phi(x)$, $f'(x) = \Phi(x)$.

Имеем:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = f(b) - f(a). \quad (1)$$

Написав теорему о среднем дифференциального исчисления (т. е. теорему Лагранжа о «конечном приращении»), имеем:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = (b-a)\Phi(c), \quad (2)$$

где c есть значение, промежуточное между a и b .

Сравнивая (1) и (2), находим:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = (b-a)\Phi(c). \quad (3)$$

Это и есть *теорема о среднем в интегральном исчислении*. Здесь $\Phi(c)$ есть промежуточная величина между наибольшей величиной M и наименьшей величиной m непрерывной функции $\Phi(x)$ на отрезке интегрирования $[a, b]$, так что из (3) имеем:

$$(b-a)m \leq \int_a^b \Phi(x) dx \leq (b-a)M. \quad (4)$$

Укажем, что величину

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(x) dx \quad (5)$$

нередко называют *средней величиной функции $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$* .

В силу равенства (3) величина (5), в самом деле, является равной величине данной непрерывной функции $\Phi(x)$ в некоторой промежуточной точке c , $a < c < b$, т. е. числу $\Phi(c)$.

§ 36. Определенный интеграл как площадь. Рассмотрим непрерывную функцию $\Phi(x)$ и положим:

$$y = \Phi(x).$$

Это есть уравнение некоторой кривой AB (рис. 6).

Пусть CD — неподвижная ордината, а PM — подвижная. Обозначим через u величину площади $CPMD$. Когда x получает приращение Δx , тогда u получает приращение Δu (= площади $PP'M'M$).

Строя вписанный прямоугольник $PP'KM$ и описанный прямоугольник $PP'M'L$, мы видим, что площадь $PP'KM < \text{площади } PP'M'M < \text{площади } PP'M'L$, или

$$PM \cdot \Delta x < \Delta u < P'M' \cdot \Delta x.$$

Отсюда, деля на Δx , имеем¹:

$$PM < \frac{\Delta u}{\Delta x} < P'M'.$$

¹ На чертеже PM меньше, чем $P'M'$. Если бы случилось, что PM оказалось больше, чем $P'M'$, тогда в предыдущем неравенстве пришлось бы перевернуть знаки $<$ и сделать их знаками $>$.

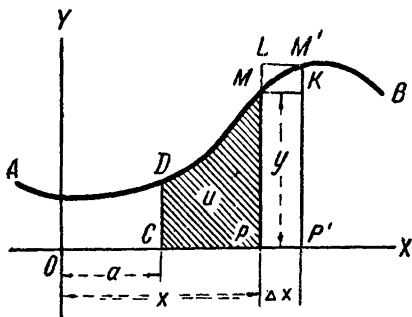


Рис. 6

Пусть теперь Δx приближается к нулю как к пределу. Тогда величина подвижной ординаты $P'M'$ приближается к величине неподвижной ординаты PM тоже как к пределу (ибо усть непрерывная функция от x). Поэтому мы получим:

$$\frac{du}{dx} = y (= PM),$$

или, в дифференциалах:

$$du = ydx = \Phi(x)dx.$$

Мы получили предложение.

Теорема. Дифференциал площади фигуры, ограниченной кривой, осью абсцисс, неподвижной ординатой и переменной ординатой, равен произведению переменной ординаты на дифференциал соответствующей абсциссы.

Из этого предложения следует, что рассматриваемая переменная площадь $\mu = CPMD$ есть одна из первообразных функций для $\Phi(x)$, так что, написав неопределенный интеграл от $\Phi(x)$ в виде

$$\int \Phi(x) dx = f(x) + C,$$

мы должны иметь:

$$CPMD = u = f(x) + C_0, \quad (1)$$

где C_0 есть какое-то вполне определенное численное значение произвольной постоянной интегрирования C .

Для того чтобы найти это число C_0 , достаточно заметить, что площадь $CPMD$ делается равной нулю, когда мы полагаем $x = a$. Поэтому, полагая в равенстве (1) переменное x равным a , мы из равенства (1) получаем:

$$0 = f(a) + C_0.$$

Значит, $C_0 = -f(a)$. Поэтому равенство (1) должно переписаться в виде:

$$CPMD = f(x) - f(a). \quad (2)$$

Если мы теперь хотим этим способом получить вполне определенную площадь $CEFD$ (рис. 7) для нашей кривой $y = \Phi(x)$, тогда достаточно в равенстве (2) положить $x = b$.

Это нам дает:

$$\text{площадь } CEFD = f(b) - f(a).$$

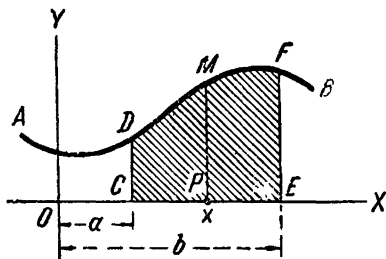


Рис. 7

И так как определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ как раз и равен разности $f(b) - f(a)$, то мы получаем окончательную формулу:

$$\text{площадь } CEFD = \int_a^b \Phi(x) dx. \quad (3)$$

Словесно:

определенный интеграл $\int_a^b \Phi(x) dx$ от непрерывной функции $\Phi(x)$ численно равен площади между кривой $y = \Phi(x)$, осью абсцисс OX и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$.

Примечание. Иногда неправильно освещают дело, утверждая, что «определенный интеграл есть площадь». Это неверно, ибо определенный интеграл прежде всего есть число, а не какой-то геометрический образ. А каково будет истолкование этого числа, это зависит уже от других обстоятельств, а именно, от геометрического, или механического, или физического смысла тех величин, которые изображены абсциссой и ординатой.

Например, когда x и y рассматриваются просто как координаты точки на плоскости, тогда определенный интеграл $\int_a^b y dx$ в самом деле есть площадь.

Но когда x есть время, а $\Phi(x)$ есть скорость движения точки, тогда кривая $y = \Phi(x)$ является скоростным графиком движения, и тогда площадь под нею и между двумя ординатами изображает пространство, пройденное точкой в течение соответствующего отрезка времени. Поэтому в этом слу-

чае определенный интеграл $\int_a^b y dx$, который по самому своему существу является *отвлеченным числом*, численно равен пройденному пространству и, стало быть, изображает уже не площадь, а длину траектории точки. Аналогично, определенный интеграл, дающий объем, поверхность, массу, силу и т. д., геометрически всегда изобразим в виде площади.

Основная формула: площадь $= \int_a^b y dx$ предполагает, что кривая $y = \Phi(x)$ действительно ограничивает площадь. Это означает, что эта кривая не уходит в бесконечность и что обе абсциссы a и b конечны.

Пример 1. Найти площадь, ограниченную параболой $y = x^2$, осью OX , прямой $x = 2$ и прямой $x = 4$ (рис. 8).

Решение. Пользуясь предыдущей формулой, имеем:

$$\text{площадь } ABDC = \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18 \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 25$, осью OX и ординатами $x = -3$, $x = 4$ (рис. 9).

Решение. Имеем $y = \sqrt{25 - x^2}$. Отсюда площадь

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^4 \sqrt{25 - x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} \right]_{-3}^4 \\ &= 6 + \frac{25}{2} \arcsin \frac{4}{5} + 6 - \frac{25}{2} \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) = 31,6 \dots \end{aligned}$$

по ХХ

Сравнить ответ с площадью этого полукруга $\frac{1}{4} \pi \cdot 25 = 39,3 \dots$

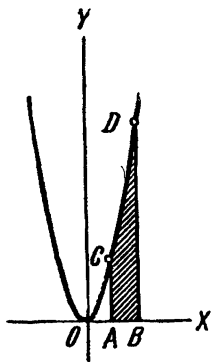


Рис. 8

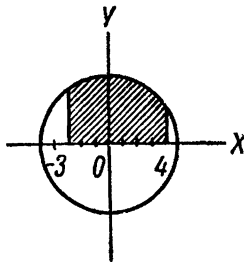


Рис. 9

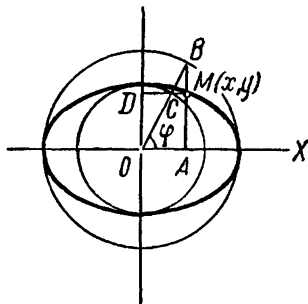


Рис. 10

§ 37. Площадь кривой, заданной уравнениями в параметрической форме. Пусть уравнения кривой даны в виде:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Мы имеем тогда $y = \psi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$. Отсюда

$$\text{площадь} = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt, \quad (1)$$

где $t = t_1$, когда $x = a$, и $t = t_2$, когда $x = b$.

Пример 3. Найти площадь эллипса, параметрические уравнения которого суть

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad (\text{рис. 10}).$$

Решение. Здесь $y = b \sin \varphi$ и $dx = -a \sin \varphi d\varphi$.

Когда $x=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и когда $x=a$, $\varphi=0$. Подставляя это в уравнение (1), мы получаем для первого квадранта:

$$\text{площадь} = \int_0^a y \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi ab}{4}, \text{ ибо } \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi.$$

Отсюда, целая площадь эллипса равна πab .

§ 38. Задача приближенного интегрирования. Если невозможно вычислить *точное* значение интеграла $\int_a^b f(x) \, dx$, то приме-

няются методы *приближенного* интегрирования. Так как всякий *определенный интеграл* можно геометрически представить в виде *площади* плоской кривой, то тем самым задача *приближенного* вычисления интеграла сводится к *приближенному* измерению площади.

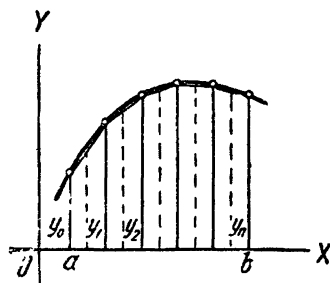


Рис. 11

§ 39. Правило трапеций. Площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$, можно с достаточной точностью заменить суммой площадей вписанных трапеций. Разобьем для этого отрезок оси OX от $x=a$ до $x=b$ на n равных частей и обозначим длину каждой такой части через Δx (рис. 11). Так как площадь трапеции равна произведению полусуммы длин параллельных оснований на высоту, то будем иметь:

$$\text{площадь первой трапеции} = \frac{1}{2} (y_0 + y_1) \Delta x,$$

$$\text{площадь второй трапеции} = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \Delta x,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{площадь } n\text{-й трапеции} = \frac{1}{2} (y_{n-1} + y_n) \Delta x.$$

Складывая площади этих трапеций, получим:

$$\begin{aligned} &\text{сумма площадей трапеций} = \\ &\frac{1}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \Delta x. \end{aligned}$$

Правило трапеций состоит в том, что искомую площадь S мы полагаем приближенно равной сумме площадей трапеций:

$$S = \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) \Delta x. \quad (1)$$

Очевидно, что чем на *большее число* делений мы разобьем интервал (a, b) оси абсцисс, тем с большей точностью сумма площадей трапеции будет представлять величину искомой площади, ограниченной кривой.

Пример. Вычислить $\int_1^{12} x^2 dx$ правилом трапеций.

Решение. Разобьем интервал оси OX от $x = 1$ до $x = 12$ на одиннадцать равных частей. Будем иметь:

$$\frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1 = \Delta x.$$

Искомая площадь ограничена кривой $y = x^2$. Подставляя в это уравнение значения абсцисс $x = 1, 2, 3, \dots, 12$, найдем значения соответствующих ординат $y = 1, 4, 9, \dots, 144$. Следовательно, по формуле (1) получаем:

$$S = \left(\frac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \frac{1}{2} \cdot 144 \right) \cdot 1 = 577 \frac{1}{2}.$$

Эта же площадь, вычисленная при помощи интегрирования, выражается числом

$$\int_1^{12} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{12} = 575 \frac{2}{3}.$$

Следовательно, в данном случае правило трапеций дает ошибку, меньшую трети процента.

§ 40. Правило Симпсона (параболическая формула). Вместо того, чтобы точки деления кривой соединять хордами и заменять искомую площадь суммой площадей трапеций, можно получить лучшее приближение к искомой площади, проводя через точки делений, лежащие на кривой, *дуги парабол* и заменяя искомую площадь суммой площадей, ограниченных этими дугами и ординатами, соответствующими точкам делений. Через какие-нибудь *три точки*, взятые на кривой, можно провести *параболу* с вертикальной осью; ряд дуг таких *парабол* теснее прилегает к кривой, чем *ломаная линия*, состоящая из хорд, соединяющих последовательно точки, лежащие на кривой.

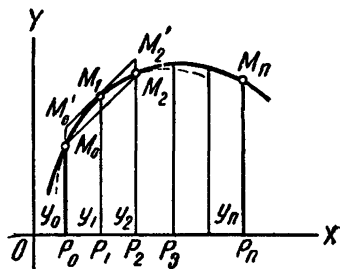


Рис. 12

Разобьем теперь интервал на оси OX от $x = a = OP_0$ до $x = b = OP_n$ на *четное* число частей n длиной Δx каждая. Через каждые три последовательные точки $M_0, M_1, M_2; M_2, M_3, M_4; \dots$ проведем дуги парабол с вертикальными осями (рис. 12). Тогда получим:

$$S = \frac{1}{3}(0 + 4 + 16 + 108 + 128 + 500 + 432 + 1372 + 1024 + 2916 + 1000) = 2500.$$

Интегрированием мы придем к тому же результату:

$$S = \int_0^{10} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} = 2500.$$

Совпадение, как легко показать, — не случайность. Природа формулы Симпсона такова, что она дает *точный* результат для всех функций

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить интеграл последнего примера по правилу трапеций, разбивая интервал интегрирования на 10 частей. Отв. 2525.

2. Вычислить $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ при помощи обоих правил, разбивая интервал интегрирования на 12 частей. Отв. По правилу трапеций 1,6182; по правилу Симпсона 1,6098.

3. Вычислить $\int_1^{11} x^3 dx$ при помощи обоих правил, полагая $n = 10$.

Отв. По правилу трапеций 3690, — Симпсона 3660.

4. Вычислить $\int_1^{10} \lg x dx$ при помощи обоих правил, полагая $n = 10$.

Отв. По правилу трапеций 6,0656, — Симпсона 6,0896.

5. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ при помощи обоих правил, полагая $n = 6$.

Отв. По правилу трапеций 1,0885, — Симпсона 1,0906.

§ 41. Интеграл с бесконечными пределами. До сих пор пределы интегрирования мы считали конечными. Но даже в элементарных вопросах иногда приходится отказаться от этого ограничения и рассматривать интегралы с бесконечными пределами. В некоторых случаях это бывает возможно, если пользоваться следующими *определениями*.

Если верхний предел бесконечен, то полагаем (по определению):

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) dx,$$

а когда бесконечен нижний предел, то полагаем (по определению):

$$\int_{-\infty}^b \varphi(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b \varphi(x) dx,$$

предполагая заранее, что эти пределы существуют.

Пример 1. Найти: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1.$

Пример 2. Найти: $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2}$.

Решение. $\int_0^{+\infty} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[4a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2a} \right]_0^b =$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[4a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2a} \right] = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2.$

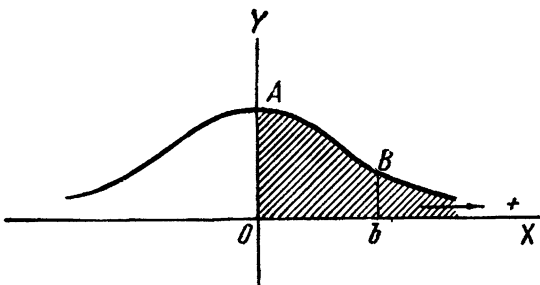


Рис. 13

Истолкуем этот результат геометрически (рис. 13). Кривая, выражаемая данной функцией, есть локон, уравнение которого и есть:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$

Значит,

$$\text{пл. } OABb = \int_0^b \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 4a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2a}.$$

По мере того, как ордината Bb будет неограниченно удаляться вправо, правая часть этого равенства всегда будет оставаться величиной конечной, стремящейся к определенному пределу:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[4a^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{2a} \right] = 2\pi a^2.$$

Как в этом случае, так и во всех аналогичных условиях назовем этот результат перехода к пределу *величиной площади кривой*.

Пример 3. Найти: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

$$\text{Решение. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b).$$

Но при возрастании b до бесконечности предел $\ln b$ не существует; следовательно, в этом случае интеграл не имеет смысла и соответствующей площади кривой $y = \frac{1}{x}$ (гиперболы) нет.

§ 42. Интеграл от функции прерывной (уходящей в бесконечность). Рассмотрим теперь случай, когда подынтегральная функция от отдельных значений переменного, лежащих внутри пределов интегрирования, претерпевает разрыв непрерывности.

Сначала рассмотрим случай, когда подынтегральная функция непрерывна для всех значений x , лежащих между пределами a и b , кроме значения $x = a$.

Если $a < b$ и ε положительно, принимаем такое определение интеграла:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x) dx, \quad (1)$$

если же $\varphi(x)$ непрерывна при всех значениях x , кроме $x = b$, принимаем такое определение интеграла:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x) dx, \quad (2)$$

предполагая, что пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют.

Пример 1. Найти: $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Решение. Здесь $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ обращается в бесконечность при $x = a$. Следовательно, по формуле (2):

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} \right) \right] = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти: $\int_0^1 \frac{dx}{x}.$

Решение. Здесь $\frac{1}{x}$ обращается в бесконечность при $x = 0$. Следовательно, по формуле (1):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

В этом случае никакого предела не существует, а следовательно, не существует и интеграла.

Если c лежит между a и b и функция $\varphi(x)$ непрерывна для всех значений x в этих пределах, за исключением значения $x = c$, то, полагая, что ε и ε' — числа положительные, интеграл между a и b определяем формулой

$$\int_b^a \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x) dx + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon'}^b \varphi(x) dx, \quad (3)$$

предполагая, что каждый предел в отдельности существует.

Пример 3. Найти: $\int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x = a$, т. е. при значении x , лежащем между пределами интеграции 0 и $3a$. Следовательно, нужно обращаться к определению (3). Итак:

$$\begin{aligned} \int_0^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_{a+\varepsilon'}^{3a} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2 - a^2} + 3a^{\frac{2}{3}} \right] + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2 - a^2} \right] = \\ &= 3a^{\frac{2}{3}} + 6a^{\frac{2}{3}} = 9a^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Чтобы интерпретировать этот результат геометрически, рассмотрим кривую

$$y = \frac{2x}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

(рис. 14). Для нее прямая $x = a$ есть асимптота.

$$\text{Площ. ОРЕ} = \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2 - a^2} + 3a^{\frac{2}{3}}.$$

По мере перемещения ординаты EP вправо к асимптоте, т. е. по мере приближения ε к нулю, правая часть этого равенства остается величиной конечной и стремится к определенному пределу:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2 - a^2} + 3a^{\frac{2}{3}} \right] = 3a^{\frac{2}{3}}.$$

Как и в примере предыдущего § условимся этот результат $3a^{\frac{2}{3}}$ перехода к пределу считать величиной площади, ограниченной кривой OP , асимптотой и осью OX . Подобным же образом

$$\begin{aligned} \text{пл. } E'QRG &= \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2xdx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \\ &= 3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Когда ордината $E'Q$ движется влево к асимптоте, т. е. когда ε' приближается к нулю, правая часть этого равенства остается величиной конечной и стремится к определенному пределу $6a^{\frac{2}{3}}$. Этот предел принимается за величину площади между кривой QR , асимптотой, ординатой

для $x = 3a$ и OX . Сумму $9a^{\frac{2}{3}}$ результатов принимают за величину площади между кривой, ординатой для $x = 3a$ и OX .

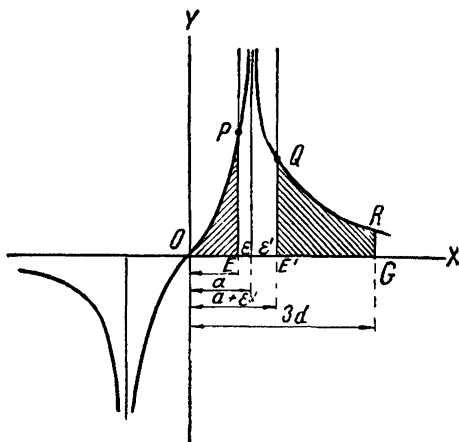


Рис. 14

Пример 4. Найти: $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$, где $a > 0$.

Решение. Эта функция также обращается в бесконечность между пределами интегрирования. Следовательно, прилагая определение (3), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\varepsilon'}^{2a} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a} \right) + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon'} \right). \end{aligned}$$

В этом случае пределы не существуют и интеграл не имеет смысла.

Начертив кривую, изображающую данную функцию (рис. 15), и заметив пределы, найдем, что, по-видимому, существует большое сходство с преды-

дущим примером. Однако в этом примере для заштрихованной части (рис. 15) нельзя создать того условного понятия величины площади, которое сделано для предыдущего случая, так как интеграл в данном случае не имеет смысла.

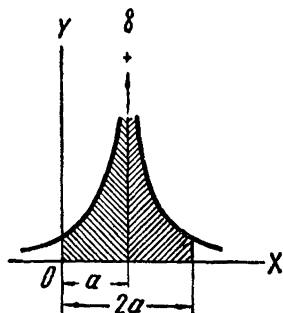


Рис. 15

Насколько важно исследовать, обращается или нет данная функция в бесконечность внутри пределов интегрирования, обнаруживается тотчас же, если приложить к нашему примеру формулу интегрирования без всякого исследования. Это дало бы:

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{2a} = -\frac{2}{a},$$

— результат явно абсурдный, ибо подынтегральная функция *положительна*.

ЗАДАЧИ

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a}.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$4. \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x)^n} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} \quad (n > 1).$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \pi.$$

$$7. \int_2^3 \frac{3x dx}{2\sqrt[4]{x^2-4}} = \sqrt[4]{125}.$$

$$8. \int_0^{2r} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}} dx = 4r.$$

$$9. \int_0^r \frac{r dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{\pi r}{2}.$$

$$10. \int_0^1 \ln y dy = -1.$$

$$11. \int_0^1 x^2 \ln x dx = -\frac{1}{9}.$$

$$12. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

ГЛАВА IV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КАК ПРОЦЕСС СУММИРОВАНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

§ 43. Введение. До сих пор мы рассматривали интегрирование, как процесс, обратный дифференцированию. Но это является лишь только одной стороной дела. Другой стороной и притом несравненно более важной для бесчисленных применений интегрального исчисления к геометрии, механике и, вообще, ко всему естествознанию, является то обстоятельство, что интегральное исчисление дает нам в руки могущественный способ фактически находить **пределы сумм бесконечно увеличивающегося числа бесконечно умалющихся слагаемых**. Стремление сводить свои проблемы к отыскиванию пределов таких сумм естествознание имело еще до эпохи Ньютона, и затем это стремление окончательно оформилось, окрепло и систематизировалось. Таким образом, было вызвано к жизни интегральное исчисление, даже несколько раньше дифференциального исчисления. С этой точки зрения интегральное исчисление получает вид уже не исчисления, обратного дифференцированию, но *процесса суммирования*.

Однако обе эти стороны интегрального исчисления тесно переплетаются между собою и, без обращения дифференцирования, интегральное исчисление как процесс суммирования не многого бы стоило. Действительно, этот процесс суммирования есть процесс *не прямой*, но *косвенный*. Прямым образом производить отыскивание пределов таких сумм мы до сих пор не умеем¹. Но коль скоро мы сумели решить *проблему, обратную дифференцированию*, т. е. отыскивали неопределенный интеграл $\int \Phi(x) dx$, то тогда *становится решенной и проблема суммирования*, ибо предел суммы

$$\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \Phi(x_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

где $x_0 = a$, $x_n = b$ и где $n \rightarrow +\infty$ в то время, как все $\Delta x_i \rightarrow 0$, равен:

$$\left[\int \Phi(x) dx \right]_a^b.$$

¹ Кроме двух-трех редчайших случаев, когда мы умеем найти величину определенного интеграла с *численными пределами*, не зная соответствующего неопределенного интеграла.

Таким образом, вся сила интегрального исчисления основана на возможности находить неопределенные интегралы $\int \Phi(x) dx$, не производя никаких переходов к пределу. По этой причине начинающий долго обучается искусству отыскивать неопределенные интегралы всяческими приемами¹. Но затем учащийся должен научиться применять находимые им неопределенные интегралы к суммированию бесконечно уменьшающихся величин, необходимому для многочисленных задач геометрии, механики и, вообще, всего естествознания.

§ 44. Общая схема применения интегрального исчисления. Интегральное исчисление применяется к самым разнообразным вопросам геометрии, механики, физики, химии, биологии и вообще естествознания, следуя всегда одной и той же схеме. Вот эта схема:

Если нам необходимо определить какую-нибудь величину V , то мы разбиваем ее на большое число малых частиц:

$$V = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$$

и стараемся представить общий член этой суммы в виде парного произведения:

$$\Phi(\xi_{i-1}) \cdot \Delta x_{i-1},$$

где непрерывная функция $\Phi(x)$ нам известна, но где численное значение аргумента ξ_{i-1} , находящегося на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, нам неизвестно. Если нам удалось это сделать и мы получили равенство

$$V = \Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1},$$

где $x_0 = a$ и $x_n = b$, мы делаем переход к пределу, совершенно рассеивающий влияние неизвестности аргументов $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ и дающий нам выражение искомой величины V в виде определенного интеграла:

$$V = \lim [\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}] = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

Если мы сможем взять неопределенный интеграл $\int \Phi(x) dx$, мы вычисляем конечным образом искомую нами величину V по

¹ Часть известных до сих пор неопределенных интегралов Ньютон мог получать интуитивным методом. Систематический канон для поисков неопределенных интегралов был дан Лейбницем. Петербургский академик Эйлер довел систематизацию таких поисков до высокого совершенства. После Эйлера было получено всего лишь несколько новых неопределенных интегралов. Наш математик Чебышев показал, что в некоторых направлениях нельзя продолжить с успехом изысканий Эйлера, так как имеются случаи, когда неопределенный интеграл невыразим через элементарные функции.

формуле Лейбница — Ньютона;

$$V = \left[\int \Phi(x) dx \right]_a^b.$$

Заметим, что «общий член» $\Phi(x_{i-1})\Delta x_{i-1}$ интегральной суммы $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ часто пишут просто в виде $\Phi(x)\Delta x$ или даже в виде $\Phi(x)dx^1$ и называют «элементом» величины V .

Сообразно указанной схеме, соответствующее **правило применения интегрального исчисления** должно разбиваться на следующие три шага.

Первый шаг. Разделить искомую величину V на неограниченное число частиц сколь угодно малых размеров.

Второй шаг. Найти выражения для этих частиц так, чтобы их сумма V имела вид:

$$\Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Третий шаг. Определив надлежащие границы $x=a$ и $x=b$, написать переход к пределу:

$$\lim [\Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}] = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

и вычислить определенный интеграл по формуле Лейбница — Ньютона:

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \left[\int \Phi(x) dx \right]_a^b.$$

§ 45. Площади плоских кривых в прямоугольных координатах.

Наиболее ясным примером, на котором иллюстрируется *общая схема применения интегрального исчисления*, является задача о точном отыскании величины V площади плоской кривой.

Пусть мы хотим найти *точную* величину V площади, ограниченной непрерывной кривой $x=\Phi(x)$, осью абсцисс OX и ординатами, восстановленными в точках $x=a$ и $x=b$ (рис. 16).

Первый шаг. Делим отрезок $[a, b]$ на n каких-нибудь малых отрезков и восстанавливаем ординаты в точках деления x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Этим построением мы разрезаем искомую площадь V на n тонких площадок, опирающихся на наши отрезки. Длины этих отрезков мы обозначаем через $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ (рис. 17).

Второй шаг. Тонкая площадка, опирающаяся на отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, очевидно, содержится между площадками описанного и вписанного прямоугольников, опирающихся на этот же самый отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ и имеющих самую большую и самую малую ординаты.

¹ Нам безразлично, писать ли Δx или dx , потому что, раз буква x обозначает *независимую переменную*, то $\Delta x = dx$.

Значит, рассматриваемая тонкая площадка с кривым верхним основанием в точности равна площади прямоугольника, опирающегося на отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ и имеющего высотой ординату кривой $\Phi(\xi_i)$, промежуточную между наибольшей и наименьшей ординатами

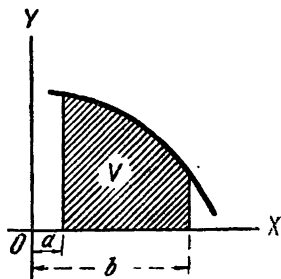


Рис. 16

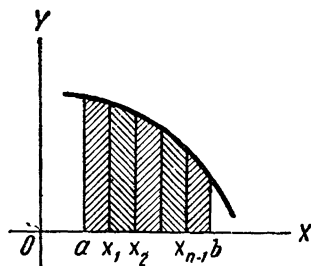


Рис. 17

на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Это будет ордината кривой в некоторой *нам неизвестной* точке ξ_i отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Следовательно, величина

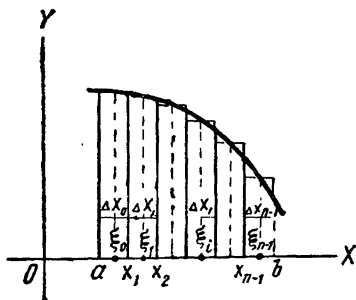


Рис. 18

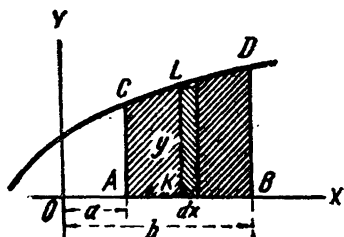


Рис. 19

кривой площадки, опирающейся на этот отрезок, в *точности* равна $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$ и, значит, имеем (рис. 18):

$$V = \Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Третий шаг. Написав переход к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} V &= \lim [\Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}] = \\ &= \int_a^b \Phi(x) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{площадь} = \int_a^b y dx.$$

Эту формулу легко запомнить, если сознательно допустить грубость в мышлении, представив себе, что интеграл есть сумма (а не предел суммы, как происходит в действительности) элементов площади $удx$, т. е. прямоугольников (вроде KL) с высотой u и основанием dx (рис. 19).

§ 46. Упрощение в выводе формул. В правиле применения интегрального исчисления, сформулированном в предыдущем параграфе, самым трудным является второй шаг, который требует, чтобы было строго доказано *точное* равенство i -й частицы искомой величины V парному произведению $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$. Иногда такое доказательство представляется хлопотливым. Поэтому очень часто, *когда дело представляется совсем ясным*, разбив искомую величину V на частицы, не доказывают, что i -я частица строго равна парному произведению $\Phi(\xi_i)\Delta x_i$, а просто берут сумму $\Phi(x_0)\Delta x_0 + \Phi(x_1)\Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ парных произведений $\Phi(x_i)\Delta x_i$ и утверждают, *на основе данных интуиции*¹, что эта сумма будет тем ближе к V , чем мельче будут все Δx_i , и что в пределе сумма $\int \Phi(x_i)\Delta x_i$ делается равной V .

В качестве примера возьмем определение величины V площади, ограниченной: кривой $x = \Phi(y)$, осью ординат OY и горизонтальными линиями $y = c$ и $y = d$.

Первый шаг. Строим n четырехугольников, как показано на рис. 20. Искомая площадь V «очевидно» является пределом суммы площадей этих четырехугольников, когда число их безгранично увеличивается, а высота каждого из них стремится к нулю.

Второй шаг. Обозначая через y_1, y_2, \dots, y_n расстояния верхних оснований этих четырехугольников от оси OX , и через $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n$ соответственно их высоты, видим, что размеры верхних оснований соответственно равны $\Phi(y_1), \Phi(y_2), \dots, \Phi(y_n)$.

Поэтому площадь i -го четырехугольника равна $\Phi(y_i)\Delta y_i$, а их сумма есть $\Phi(y_1)\Delta y_1 + \Phi(y_2)\Delta y_2 + \dots + \Phi(y_n)\Delta y_n$.

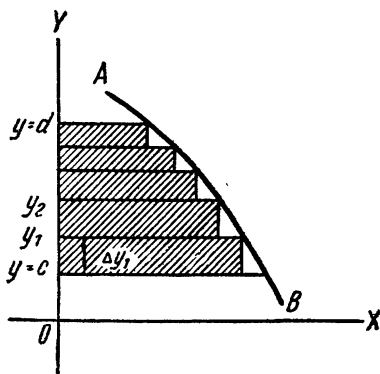


Рис. 20

¹ Чтобы избежать обращения к непосредственной интуиции, обычно прибегают к так называемому *принципу интегрального исчисления*, позволяющему при суммировании бесконечно малых пренебрегать бесконечно малыми равномерно-высшего порядка, сохраняя при этом всю точность окончательного результата. Об этом см. § 55.

Третий шаг. Написав переход к пределу, имеем:

$$V = \lim [\Phi(y_1)\Delta y_1 + \Phi(y_2)\Delta y_2 + \dots + \Phi(y_n)\Delta y_n] = \int_c^d \Phi(y) dy.$$

Следовательно,

$$\text{площадь} = \int_c^d x dy. \quad (2)$$

Эта формула легко запоминается, когда, сознательно прибегая к огрублению мышления, представляют себе (назаконно), что интеграл есть сумма элементов площади $x dy$, т. е. прямоугольников с высотой dy и основанием x (рис. 21).

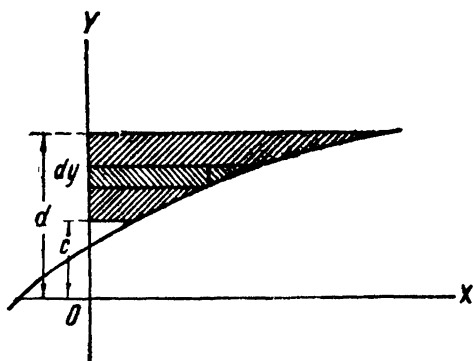


Рис. 21

§ 47. Смысл отрицательного знака у площади. В формуле

$$\text{площадь} = \int_a^b y dx \quad (1)$$

предполагается, что $a < b$. Так как написанный направо определенный интеграл есть предел суммы $y_0 \Delta x_0 +$

$+ y_1 \Delta x_1 + \dots + y_{n-1} \Delta x_{n-1}$, то, если y является отрицательной величиной, тогда каждое парное произведение $y_i \Delta x_i$ тоже отрицательно. Поэтому в этом случае формула (1) дает площадь со знаком минус. Но это означает только то, что площадь лежит ниже оси OX .

Пример 1. Найти площадь одной волны синусоиды $y = \sin x$ (рис. 22).

Решение. Так как $\sin x = 0$, когда $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$, то

$$\text{площадь } OAB = \int_a^b y dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2,$$

$$\text{площадь } BCD = \int_a^b y dx = \int_\pi^{2\pi} \sin x dx = -2.$$

Пример 2. Найти площадь, ограниченную полукубической параболой $ay^2 = x^3$, осью OY и прямыми $y = a, y = 2a$ (рис. 23).

Решение. Элемент площади $= x dy = a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy$.
Отсюда

$$\text{площадь } BMNC = \int_a^{2a} 2^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} (\sqrt[3]{32} - 1) = 1,304 \dots a^{\frac{1}{3}}.$$

Заметить, что площадь $OLMB = a^2$.

Пример 3. Найти площадь, заключенную между параболой $x^2 = 4ay$ и локоном Аньези $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ ($a > 0$) (рис. 24).

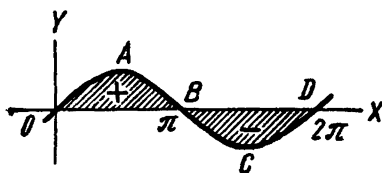


Рис. 22

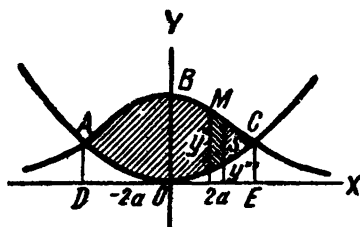


Рис. 24

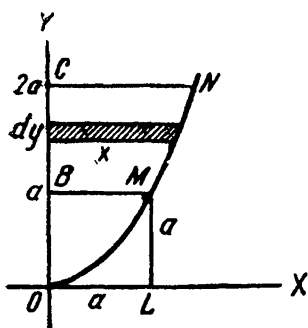


Рис. 23

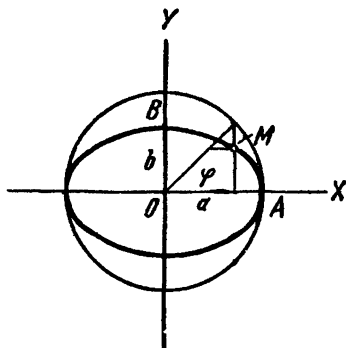


Рис. 25

Решение. Для определения пределов интегрирования решаем уравнения данных кривых совместно, чтобы найти точки, в которых кривые пересекаются. Найдем, что точки пересечения суть $A(-2a, a)$ и $C(2a, a)$.

Из рисунка 24 видно, что площ. $AOCB$ = площ. $DECBA$ — площ. $DECOA$. Но

$$\text{площ. } DECBA = 2 \times \text{площ. } OECB = 2 \int_0^{2a} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 2\pi a^2,$$

$$\text{площ. } DECOA = 2 \times \text{площ. } OEC = 2 \int_0^{2a} \frac{x^3}{4a} dx = \frac{4}{3} a^3.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } AOCB = 2\pi a^2 - \frac{4}{3}a^2 = 2a^2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$

К решению вопроса можно подойти иным путем, рассматривая полосу MS как элемент площади. Если обозначить ординату, соответствующую локону, через y^* , а ординату, соответствующую параболе, через y^{**} , то дифференциальное выражение площади полосы MS будет $(y^* - y^{**}) dx$. Подставив значения y^* и y^{**} в функции x из данных уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \text{пл. } AOCB &= 2 \times \text{пл. } OCB = 2 \int_0^{2a} (y^* - y^{**}) dx = \\ &= 2 \int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^3 + 4a^2} - \frac{x^2}{4a} \right) dx = 2a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти площадь эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Ищем площадь квадранта эллипса, т. е. четверти эллипса OAB (рис. 25), причем пределами служат $x=0$ и $x=a$, а $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Подстановка в (1) дает:

$$\text{пл. } OAB = \frac{b}{a} \int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{bx}{2a} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \frac{\pi ab}{4}.$$

Следовательно, площадь всего эллипса равна πab .

ЗАДАЧИ

1. Вычислить площадь, ограниченную прямой $y=5x$, осью OX и ординатой $x=2$. Отв. 10.
2. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y^2=4x$, осью OX и прямыми $x=4$ и $x=9$.

Отв. $25 \frac{1}{3}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=9x$ и $y=3x$.

Отв. 0,5.

4. Найти площадь, заключенную между равнобокой гиперболой $xy=a^2$, осью OX и ординатами $x=a$ и $x=2a$.

Отв. $a^2 \ln 2$.

5. Найти площадь, заключенную между кривой $y=4-x^2$ и осью OX .

Отв. $10 \frac{2}{3}$.

6. Найти площадь, заключенную между полукубической параболой $y^2=x^3$, осью OY и прямой $y=4$.

Отв. $\frac{24}{5} \sqrt[3]{2}$.

7. Найти площадь, ограниченную гипоциклоидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Отв. $\frac{3}{8} \pi a^2$.

8. Найти площадь между цепной линией $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, осями OX и OY и прямой $x = a$.

$$\text{Отв. } \frac{a^2}{2e} (e^2 - 1).$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью OY .

$$\text{Отв. } 12.$$

10. Найти площадь, ограниченную кривой $y = \ln x$, осью OX и ординатами $x = 1$ и $x = a$.

$$\text{Отв. } a (\ln a - 1) + 1.$$

11. Найти всю площадь, ограниченную кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

$$\text{Отв. } \frac{3\pi ab}{8}.$$

12. Найти всю площадь фигуры, ограниченной кривой $a^2 y^2 = x^3 (2a - x)$.

$$\text{Отв. } \pi a^2.$$

13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x(y - e^x) = \sin x$ и $2xy = 2 \sin x + x^3$, осью OY и ординатой $x = 1$.

$$\text{Отв. } \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{2} x^2 \right) dx = e - \frac{7}{6} = 1,552 \dots$$

14. Найти площадь, содержащуюся между локоном Аньези $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ и осью OX , асимптотой кривой.

$$\text{Отв. } 4\pi a^2.$$

15. Найти площадь, заключенную между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ и ее асимптотой $x = 2a$.

$$\text{Отв. } 3\pi a^2.$$

16. Найти площадь, содержащуюся между параболой $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

$$\text{Отв. } \frac{4}{3} p^2.$$

17. Найти площадь, содержащуюся между параболой $y^2 = 2x$ и кругом $y^2 = 4x - x^2$.

$$\text{Отв. } 2 \left(\pi - \frac{8}{3} \right) = 0,9499 \dots$$

18. Найти выражение площади, ограниченной равнобочной гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$, осью OX и диаметром, проходящим через любую точку (x, y) .

$$\text{Отв. } \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a}.$$

19. Найти путем интегрирования площадь треугольника, ограниченного осью OY и прямыми $2x + y + 8 = 0$ и $y = -4$.

$$\text{Отв. } 4.$$

20. Найти интегрированием площадь круга $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, где θ — параметр.

21. Найти площадь, ограниченную одной дугой циклоиды $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$. [Так как x изменяется от 0 до $2\pi a$, то параметр θ изменяется от 0 до 2π].

$$\text{Отв. } 3\pi a^2, \text{ т. е. утроенная площадь производящего круга.}$$

22. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

Отв. $6\pi a^2$.

23. Найти площадь гипоциклоиды $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$, где θ — параметр.

Отв. $\frac{3}{8} \pi a^2$, т. е. $\frac{3}{8}$ площади описанного круга.

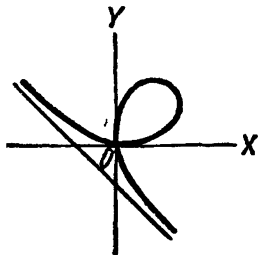


Рис. 26

24. Найти площадь, образуемую петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ (рис. 26).

Указание. Пусть $y = tx$; тогда

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad \text{и} \quad dx + \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} 3a dt.$$

Пределы для t суть 0 и ∞ .

Отв. $\frac{3}{2} a^2$.

25. Найти площадь фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $(y-x)^2 = x^3$, $y=0$;

Отв. $\frac{1}{10}$.

б) $(x-y^2)^2 = y^5$, $x=0$;

Отв. $\frac{1}{21}$.

в) $\varphi^2 y = x(x^2 - a^2)$, $y=0$;

Отв. $\frac{1}{2} a^3$.

г) $x(1+y^2) = 1$, $x=0$;

Отв. π .

е) $x = y^2(y-1)$, $x=0$.

Отв. $\frac{1}{12}$.

§ 48. Площади плоских кривых в полярных координатах. Пусть ищется площадь V , ограниченная кривой $\rho = f(\theta)$ и двумя радиусами-векторами с полярными углами α и β .

Первый шаг. Искомая площадь V «очевидно» есть предел суммы площадей круговых секторов, указанных на рисунке 27.

Второй шаг. Пусть $\Delta\theta_0, \Delta\theta_1, \dots$ — центральные углы секторов и ρ_0, ρ_1, \dots — их радиусы. Сумма площадей круговых секторов равна:

$$\frac{1}{2} \rho_0^2 \Delta\theta_0 + \frac{1}{2} \rho_1^2 \Delta\theta_1 + \dots + \frac{1}{2} \rho_{n-1}^2 \Delta\theta_{n-1},$$

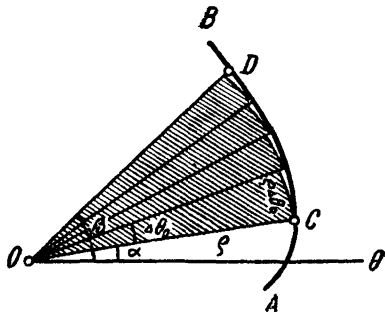


Рис. 27

ибо площадь кругового сектора равна половине произведения квадрата радиуса на радианную меру дуги.

Отсюда площадь начального кругового сектора равна: $\frac{1}{2} \rho_0^2 \Delta \theta_0$ и т. д.

Третий шаг. Написав переход к пределу, имеем:

$$V = \lim \left[\frac{1}{2} \rho_0^2 \Delta \theta_0 + \frac{1}{2} \rho_1^2 \Delta \theta_1 + \dots + \frac{1}{2} \rho_{n-1}^2 \Delta \theta_{n-1} \right] = \int_a^b \frac{1}{2} \rho^2 d\theta.$$

Следовательно,

$$\text{площадь} = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 d\theta. \quad (3)$$

Для памяти: элемент площади есть круговой сектор радиуса ρ и с центральным углом $d\theta$. Его площадь $= \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$.

Пример 1. Найти площадь всей лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Решение. Геометрическая лемниската представляет собой фигуру, напоминающую восьмерку, расположенную так, как показывает рисунок 28. Кривая проходит через начало прямоугольных декартовых координат O и имеет в этой точке две различные касательные прямые, делящие пополам угол между

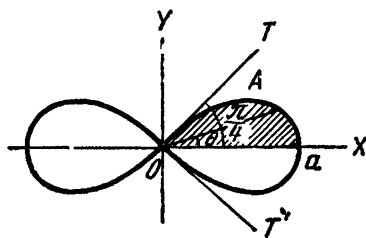


Рис. 28

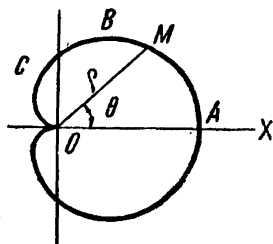


Рис. 29

осьми координат. Поэтому целая площадь лемнискаты ровно в 4 раза больше заштрихованной ее части OAA , получающейся, если заставить изменяться полярный угол от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Поэтому вся площадь лемнискаты равна:

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\varphi d\varphi.$$

Первый шаг. Первообразная для $\frac{1}{2} a^2 \cos 2\varphi$ есть $\frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi + C$, как показывает непосредственная проверка.

Второй шаг. Составляем разность:

$$\left[\frac{1}{4} a^2 \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} a^2 \sin 2 \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{1}{4} a^2.$$

Отв. Вся искомая площадь равна $4 \cdot \frac{1}{4} a^2 = a^2$, т. е. площади квадрата со стороной a .

Пример 2. Найти всю площадь кардиоиды

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

(рис. 29).

Решение. Так как кривая симметрична относительно полярной оси, то вся площадь равна удвоенной площади $OABC$. Эту площадь радиус-вектор опишет при изменении θ от нуля до π . Отсюда подстановка в (3) дает:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \\ &= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2, \end{aligned}$$

т. е. площадь кардиоиды равна ушестеренной площади производящего круга.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить площадь, описываемую радиусом-вектором спирали Архимеда $\rho = a\theta$ при одном его обороте, при начале движения от $\theta = 0$.

Отв. $\frac{4}{3} \pi a^2$.

2. Вычислить площадь одной петли кривой $\rho = a \cos 2\theta$.

Отв. $\frac{1}{8} \pi a^2$.

3. Доказать, что площадь трех петель кривой $\rho = a \sin 3\theta$ равна четверти площади описанного круга.

4. Найти площадь, ограниченную параболой $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ и хордой, перпендикулярной к ее оси и проведенной через фокус.

Отв. $\frac{8a^2}{3}$.

5. Показать, что площадь, ограниченная любыми двумя радиусами-векторами гиперболической спирали $\rho\theta = a$, пропорциональна разности этих радиусов.

6. Найти площадь эллипса $\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$.

Отв. πab .

7. Найти всю площадь кривой $\rho = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$.

Отв. πa^2 .

8. Найти площадь, ограниченную одной петлей кривой $\rho^2 \cos \theta = a^2 \sin 3\theta$.

Отв. $\frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} a^2 \ln 2$.

9. Найти площадь, ограниченную кривой $\rho^2 = a^2 \sin 4\theta$.

Отв. a^2 .

§ 49. Объемы тел вращения. Пусть V — объем тела, образованного вращением плоской фигуры $ABCD$ около оси OX , причем уравнение плоской кривой DC есть

$$y = f(x).$$

Первый шаг. Строим прямоугольники, вписанные в плоскую фигуру $ABCD$, как показано на рисунке 30. Когда площадь вращается около OX , каждый прямоугольник образует круглый цилиндр. Иско-

мый объем V «очевидно» равен пределу суммы объемов этих цилиндров (черт. 30).

Второй шаг. Основания прямоугольников обозначаем через $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots$, а их высоты через y_0, y_1, \dots . Тогда объем цилиндра, образованного прямоугольником $AEFD$, есть $\pi y_0^2 \Delta x_0$ и, значит, сумма объемов всех этих цилиндров есть:

$$\pi y_0^2 \Delta x_0 + \pi y_1^2 \Delta x_1 + \dots + \pi y_{n-1}^2 \Delta x_{n-1}.$$

Третий шаг. Написав переход к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} V &= \lim [\pi y_0^2 \Delta x_0 + \dots + \pi y_{n-1}^2 \Delta x_{n-1}] = \\ &= \int_a^b \pi y^2 dx. \end{aligned}$$

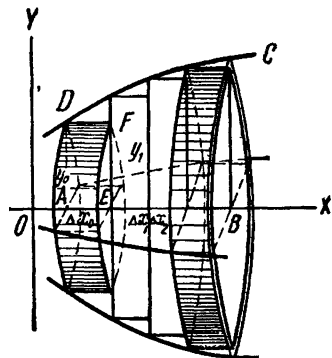


Рис. 30

Следовательно, объем тела вращения, образованного вращением плоской кривой DC около оси OX и ограниченного двумя плоскостями, перпендикулярными к ней, проведенными в точках $x=a$ и $x=b$, дается формулой:

$$\text{объем} = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad (4)$$

где, разумеется, надо иметь в виду, что $y = f(x)$.

Для памяти: элемент объема есть объем круглого цилиндра, имеющего радиусом основания y , а высотой dx . Его объем есть $\pi y^2 dx$.

Если кривая CD дана уравнениями в параметрическом виде

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

тогда нужно в выведенной формуле объема подставить $y = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$ и переменить пределы интегрирования на t_1 и t_2 , если $t = t_1$ при $x = a$ и $t = t_2$ при $x = b$.

Пример 1. Найти объем, производимый вращением эллипса около его оси (рис. 31).

Решение. Пусть уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Мы находим отсюда

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2). \text{ И так как уравнение вращаемой кривой предполагается в виде}$$

$$y = f(x), \text{ то поэтому мы заключаем, что в нашем случае } f^2(x) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Так как ясно, что объем всего данного тела вдвое больше объема того тела,

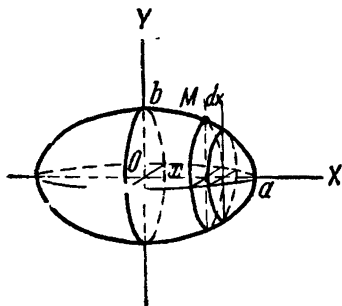


Рис. 31

которое получается вращением дуги aMb эллипса, то искомый объем всего

тела равен: $2 \int_0^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$.

Первый шаг. Первообразная для $\pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ есть

$$\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Второй шаг. Составляем разность:

$$\begin{aligned} & \left[\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^a = \\ & = \left[\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 a - \frac{a^3}{3} \right) \right] - 0 = \frac{2}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

Отв. Весь искомый объем равен $\frac{4}{3} \pi a b^2$.

Если $a = b$, тогда ясно, что вращается круг радиуса a . Объем же шара радиуса a равен $\frac{4}{3} \pi a^3$. Это как раз и выходит из полученной формулы, если сделать $a = b$.

Пример 2. Найти объем тела, образуемого вращением вокруг оси OX гипоциклоиды:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Здесь $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$; следовательно, $F^2(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3$. Кривая, а равно и полученное тело вращения (рис. 32), симметричны относительно оси OY , поэтому

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = \\ &= 2\pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right) dx = \frac{23}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Посредством интегрирования найти объем прямого конуса, производимого вращением вокруг оси OX прямой, соединяющей начало с точкой (a, b) .

Отв. $\frac{1}{3} \pi a b^2$.

2. Найти объем кольца (тора), производимого вращением круга $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ вокруг OX .

Отв. $2\pi^2 a^2 b$.

3. Найти объем параболоида вращения, производимого вращением дуги параболы $y^2 = 4ax$ между началом и точкой (x_1, y_1) вокруг ее оси.

Отв. $2\pi a x_1^2 = \frac{1}{2} \pi y_1^2 x_1$, т. е. половина объема описанного цилиндра.

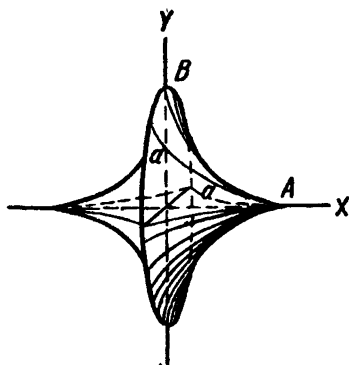


Рис. 32

4. Посредством интегрирования найти объем конуса, производимого вращением вокруг OX части прямой $4x - 5y + 3 = 0$, содержащейся между осями координат.

$$\text{Отв. } \frac{9}{100} \pi.$$

5. Найти объем, производимый вращением вокруг оси OX кривой $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$ между пределами $x = 0$ и $x = 3a$.

$$\text{Отв. } \frac{1}{2} \pi a^3 (15 - 16 \ln 2).$$

6. Найти объем тела, образуемого вращением вокруг оси OX каждой из фигур, ограниченных следующими линиями:

а) Дугой параболы $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ и прямыми $x = 0$, $y = 0$. $\text{Отв. } \frac{\pi a^3}{15}.$

б) Одной дугой синусоиды $y = \sin x$. $\text{Отв. } \frac{\pi^2}{2}.$

с) Параболой $y^2 = 4x$ и прямой $x = 4$. $\text{Отв. } 32\pi.$

д) Кривой $y = xe^x$ и прямыми $x = 1$, $y = 0$. $\text{Отв. } \frac{\pi}{4} (e^2 - 1).$

е) Кривой $y^2 = 9x$ и прямой $y = 3x$. $\text{Отв. } \frac{3\pi}{2}.$

7. Найти объем тел, образуемых вращением фигур, ограниченных следующими линиями:

| | Вокруг оси OX | Вокруг оси OY . |
|--|-------------------------------|--------------------------|
| а) $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$; | $\text{Отв. } \frac{\pi}{2};$ | $2\pi;$ |
| б) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$; | $\frac{128\pi}{7};$ | $\frac{96\pi}{5};$ |
| с) $ay^2 = x^3$, $y = 0$, $x = a$; | $\frac{1}{4} \pi a^3;$ | $\frac{3}{7} \pi a^3;$ |
| д) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$; | $48\pi;$ | $64\pi;$ |
| е) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$; | $\frac{32}{35} \pi ab^2;$ | $\frac{4}{5} \pi a^2 b.$ |

8. Найти объем тела вращения, производимого вращением цепной линии $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ вокруг оси OX от $x = 0$ до $x = b$.

$$\text{Отв. } \frac{\pi a^3}{8} \left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

9. Найти объем тела, производимого вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ вокруг ее асимптоты $x = 2a$. $\text{Отв. } 2\pi^2 a^3.$

10. Показать, что объем конической верхушки высоты a , отрезанной от тела, производимого вращением равносносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ вокруг оси OX , равен объему шара радиуса a .

11. Пользуясь параметрическими уравнениями гипоциклоиды

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta,$$

вычислить объем тела, производимого вращением кривой вокруг оси OX .

$$\text{Отв. } \frac{32\pi a^3}{105}.$$

12. Найти объем, производимый вращением дуги циклоиды:

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta),$$

1) вокруг оси OX ; 2) вокруг оси OY .

Отв. $5\pi^2 a^3$ и $6\pi^2 a^3$.

13. Показать, что объем тела, производимого вращением кривой $x^2 y^2 = -(x-a)(x-b)$ вокруг оси OX , предполагая $b > a$, равен:

$$\pi \left\{ (a+b) \ln \frac{b}{a} - 2(b-a) \right\}.$$

14. Найти объем, производимый вращением кривой $x^4 - a^2 x^2 + a^2 y^2 = 0$ вокруг оси OX .

Отв. $\frac{4}{15} \pi a^3$.

15. Найти объем тела, производимого вращением кривой $x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1$ вокруг оси OY .

Отв. $\frac{4}{5} \pi$.

§ 50. Длина кривой. Измерение длины какого-нибудь прямолинейного отрезка делается непосредственно: для этого берут другой прямолинейный отрезок, принимаемый за единицу масштаба, и, прикладывая его к измеряемому отрезку, стараются сосчитать, сколько раз уложится в нем эта единица масштаба.

Такое непосредственное измерение делается невозможным, когда хотят определить длину кривой линии, ибо прямолинейная единица масштаба не может совпасть с дугой кривой линии. Разгибать же кривую дугу также не имеет смысла, потому что при этом разгибании может измениться ее «длина».

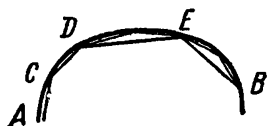


Рис. 33

Поэтому, для измерения длины дуги употребляют другой прием:

делят кривую AB на какое-нибудь число частей, помещая на нее точки (например, C, D, E), и затем соединяют каждые две соседние точки хордой (таковы хорды: AC, CD, DE, EB , рис. 33).

Длина кривой определяется как предел суммы длин хорд, когда число точек деления безгранично увеличивается, в то время как каждая из хорд в отдельности стремится по своему размеру к нулю.

Этот прием измерения длины кривой дуги называется «выпрямлением» кривой.

Учащийся с этим приемом имел дело в элементарной геометрии, когда там речь шла о длине окружности, как пределе периметра вписанного (или описанного) правильного многоугольника, когда число его сторон безгранично удваивалось.

Мы сейчас будем иметь дело с этим процессом нахождения длины плоской кривой, и учащийся должен внимательно изучить, как он применяется.

§ 51. Длина плоской кривой в прямоугольных координатах.
Пусть дана кривая

$$y = f(x)$$

и на ней две точки $P(a, c)$ и $Q(b, d)$. Требуется найти длину дуги PQ .

Первый шаг. Помещаем на дуге PQ всего $n - 1$ промежуточных точек M_1, M_2, \dots, M_{n-1} . Ими дуга PQ разбивается на n дуг, концы которых попарно соединяем хордами. Искомая длина дуги PQ есть предел суммы длин этих хорд (рис. 34).

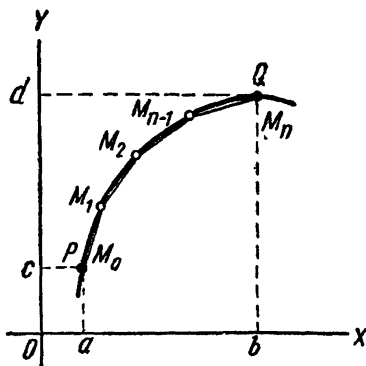


Рис. 34

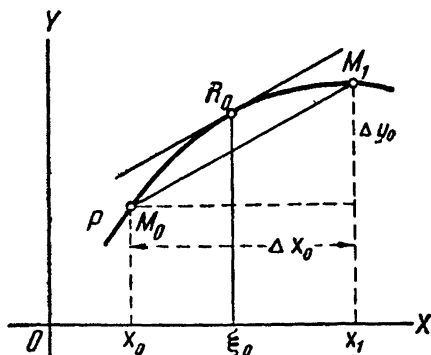


Рис. 35

Второй шаг. Рассмотрим какую-нибудь из этих хорд, например начальную PM_1 . При этом мы координаты точки M_i обозначаем через x_i и y_i и ради простоты обозначения полагаем $P = M_0$, $a = x_0$, $c = y_0$, и также $Q = M_n$, $b = x_n$, $d = y_n$. Имеем:

$$PM_1 = M_0M_1 = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right)^2} \cdot \Delta x_0.$$

По теореме же о среднем имеем:

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = f'(\xi_0) \cdot \Delta x_0,$$

где ξ_0 есть некоторая нам неизвестная точка отрезка $[x_0, x_1]$ (рис. 35).

Таким образом, $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(\xi_0)$ и, значит:

$$PM_1 = M_0M_1 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_0)} \cdot \Delta x_0.$$

Аналогично, для всех остальных хорд имеем:

$$M_1M_2 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)} \cdot \Delta x_1,$$

$$M_2M_3 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_2)} \cdot \Delta x_2,$$

$$M_{n-1}Q = M_{n-1}M_n = \sqrt{1 + f'^2(\xi_{n-1})} \cdot \Delta x_{n-1}.$$

Значит, длина ломаной линии, составленной хордами, равна:

$$\sqrt{1+f'^2(\xi_0)} \cdot \Delta x_0 + \dots + \sqrt{1+f'^2(\xi_{n-1})} \cdot \Delta x_{n-1}.$$

Третий шаг. Написав переход к пределу, имеем:

$$\begin{aligned} \lim [\sqrt{1+f'^2(\xi_0)} \Delta x_0 + \dots + \sqrt{1+f'^2(\xi_{n-1})} \Delta x_{n-1}] &= \\ &= \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx. \end{aligned}$$

Следовательно, обозначая длину кривой дуги PQ через s , имеем:

$$\text{длина дуги} = s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx, \quad (5)$$

где производная $y' = \frac{dy}{dx}$ должна быть предварительно найдена из уравнения кривой $y = f(x)$.

Эту формулу можно было бы вывести из выражения дифференциала ds дуги кривой, найденного еще в дифференциальном исчислении (часть I, § 123). Действительно, там мы получили:

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx;$$

откуда

$$s = \left[\int \sqrt{1+y'^2} dx \right]_a^b = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Если кривая PQ дана уравнением

$$x = f(y),$$

то тогда все сделанные рассуждения для вывода формулы (5) остаются в порядке, ибо роли оси OX и оси OY совершенно равноправны. Отсюда мы сразу можем написать:

$$\text{длина дуги} = s = \int_c^d \sqrt{x'^2 + 1} \cdot dy. \quad (5^*)$$

Если же кривая PQ задана параметрическими уравнениями

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t),$$

то проще всего воспользоваться формулой, также симметричной по отношению к осям координат OX и OY : $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е.

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и, значит, $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Отсюда:

$$\begin{aligned} \text{длина дуги} = s &= \left[\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)} dt, \end{aligned} \quad (5^{**})$$

ибо имеем $dx = f'(x) dt$ и $dy = \varphi'(t) dt$.

Для памяти: элемент дуги есть гипотенуза прямоугольника с катетами dx и dy . По теореме Пифагора, ее длина равна:

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Пример 1. Найти длину окружности (рис. 36)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Решение. Дифференцируя, находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Подстановка в (5) дает:

$$\text{дуга } BA = \int_0^r \left[1 + \frac{x^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{y^2 + x^2}{y^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

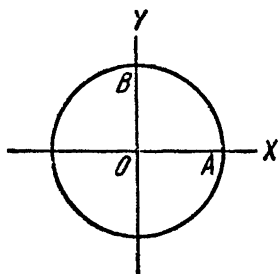


Рис. 36

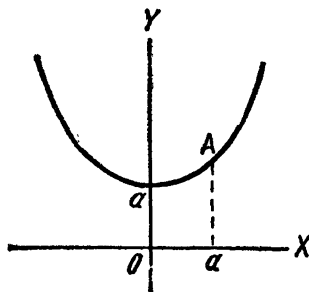


Рис. 37

[подставляя $y^2 = r^2 - x^2$ из уравнения круга для исключения y .]
Отсюда

$$\text{дуга } BA = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

Значит, для всей окружности длина дуги равна $2\pi r$.

Пример 2. Найти длину цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

(рис. 37) от $x = 0$ до $x = a$.

Решение. Первый шаг:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Второй шаг. Первообразная для $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ есть

$$\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + C,$$

как показывает непосредственная проверка.

Третий шаг. Составляем разность:

$$\left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \right]_0^a = \frac{a}{2} (e - e^{-1}) = \frac{a}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right).$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^3 = x^3$ от начала до ординаты $x = 5a$.

Отв. $\frac{335}{27} a$.

2. Найти всю длину гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Отв. $6a$.

3. Спрямить цепную линию $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ от $x = 0$ до точки (x, y) .

Отв. $\frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

4. Спрямить кривую $9ay^3 = x(x - 3a)^3$ от $x = 0$ до $x = 3a$.

Отв. $2a\sqrt{3}$.

5. Найти длину кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ в одном квадранте.

Отв. $\frac{a^{\frac{2}{3}} + ab + b^{\frac{2}{3}}}{a + b}$.

6. Найти длину кривой $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от $x = a$ до $x = b$.

Отв. $\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b$.

7. Найти длину ветви циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Отв. $8a$.

8. Найти длину дуги от $\theta = 0$ до $\theta = \theta_1$ эвольвенты круга, уравнения которой

$$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta), \quad y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta).$$

Отв. $\frac{1}{2} a \theta_1^3$.

§ 52. Длина плоской кривой в полярных координатах. Из формулы дифференциала дуги ds в полярных координатах (часть I, § 124)

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

мы выводим сразу:

$$\text{длина дуги} = s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad (6)$$

где, разумеется, ρ и $\frac{d\rho}{d\theta}$ должны быть получены из полярного уравнения кривой.

В случае, когда удобнее принять за независимое переменное не θ , а ρ , мы имеем:

$$\text{длина дуги} = s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \left(\rho \frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} d\rho, \quad (6^*)$$

где производная $\frac{d\theta}{d\rho}$ должна быть предварительно найдена из полярного уравнения кривой.

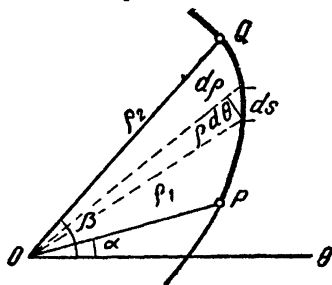


Рис. 38

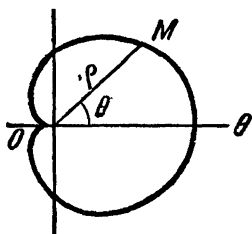


Рис. 39

Для памяти: элемент дуги есть гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами $d\rho$ и длиной дуги кругового сектора $\rho d\theta$. По теореме Пифагора ее длина $= \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$ (рис. 38).

Пример. Найти периметр кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \theta)$ (рис. 39).

Решение. Здесь $\frac{d\rho}{d\theta} = -a \sin \theta$.

Когда θ изменяется от 0 до π , точка P описывает половину кривой. Подставляя в (6), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a. \end{aligned}$$

Итак,

$$s = 8a.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти длину спирали Архимеда $\rho = a\theta$ от начала до конца первого завитка.

$$\text{Отв. } \pi a \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}).$$

2. Спрямить спираль $\rho = e^{a\theta}$ от начала до точки (ρ, θ) .

$$\text{Отв. } \frac{\rho}{a} \sqrt{a^2 + 1}.$$

3. Найти длину всей кривой $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$.

$$\text{Отв. } \frac{3}{2} \pi a.$$

4. Найти длину окружности круга $\rho = 2r \sin \theta$.

$$\text{Отв. } 2\pi r.$$

5. Найти длину гиперболической спирали $\rho\theta = a$ от (ρ_1, θ_1) до (ρ_2, θ_2) .

$$\text{Отв. } \sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \ln \frac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})}.$$

6. Найти длину дуги циссоиды $\rho = 2a \operatorname{tg} \theta \sin \theta$ от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Отв. } 2a \left\{ \sqrt{5} - 2 - \sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})} \right\}.$$

7. Найти длину дуги параболы $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ от $\theta = -\frac{\pi}{2}$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Отв. } 2a [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].$$

§ 53. Поверхность тела вращения. Поверхность тела вращения образована вращением плоской дуги CD кривой

$$y = f(x)$$

около оси OX .

Нужно измерить величину поверхности этого тела.

Первый шаг. Как раньше, мы разбиваем отрезок AB на отрезки длин $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots$ и восстанавливаем ординаты y_0, y_1, \dots в точках x_0, x_1, \dots деления. Проводим хорды CE, EF, \dots . Когда кривая вращается, каждая хорда описывает боковую поверхность усеченного конуса. Искомая поверхность тела вращения определяется как *предел суммы боковых поверхностей этих усеченных конусов* (рис. 40).

Второй шаг. Ради ясности чертим начальный усеченный конус в увеличенном масштабе. Пусть M есть середина хорды CE . Тогда боковая поверхность конуса

$$= 2\pi NM \cdot CE, \quad (1)$$

ибо боковая поверхность усеченного круглого конуса равна длине окружности, описанной серединой образующей, умноженной на длину этой образующей (рис. 41).

Преобразуем выражение (1). Прежде всего:

$$CE = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\right)^2} \cdot \Delta x_0 = \sqrt{1 + f'^2(\xi_0)} \Delta x_0,$$

ибо по теореме о среднем имеем $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(\xi_0)$, где ξ_0 есть какая-то нам не известная точка отрезка $[x_0, x_1]$.

Затем отрезок NM , будучи средней линией в трапеции Cx_0x_1E , равен полусумме $\frac{y_0 + y_1}{2}$. Легко видеть, что эта полусумма отли-

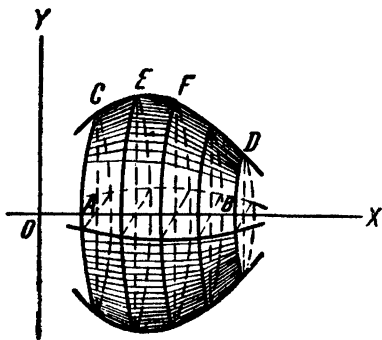


Рис. 40

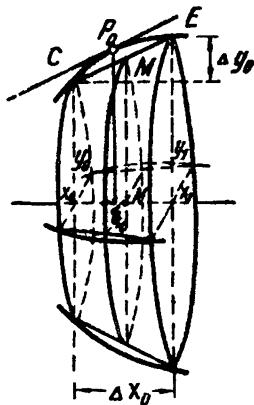


Рис. 41

чается от ординаты $f(\xi_0)$ в точке ξ_0 на величину ε_0 , сколь угодно малую. Ибо имеем:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} - f(\xi_0) = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} - f(\xi_0) = \frac{f(x_0) - f(\xi_0)}{2} + \frac{f(x_1) - f(\xi_0)}{2}.$$

И так как вся кривая CD непрерывна, то функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Это означает, что для всякого положительного ε , заранее заданного и сколь угодно малого, имеется такое положительное η , что неравенство $|x' - x''| < \eta$ непременно заставляет удовлетвориться неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. А отсюда следует, что когда длины $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ отрезков станут меньше, чем η , то тогда разность значений функции $f(x)$ в двух любых точках всякого отрезка будет меньше, чем ε .

В частности, мы будем иметь:

$$|f(x_0) - f(\xi_0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f(x_1) - f(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\left| \frac{y_1 + y_2}{2} - f(\xi_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы имеем:

$$NM - f(\xi_0) = \varepsilon_0, \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon.$$

ибо сумма, написанная непосредственно перед интегралом, стремится к нему, как к пределу, когда все $\Delta x_i \rightarrow 0$, число же ε есть фиксированное.

Стоящий направо определенный интеграл, как мы знаем, равен длине L всей кривой CD . Значит, начиная с некоторого момента времени, мы имеем:

$$\left| \sum_{i=0}^{i=n-1} 2\pi\varepsilon_i \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right| < 3\pi\varepsilon \cdot L.$$

Так как положительное фиксированное ε можно взять сколь угодно малым, то величина, стоящая в левой части этого неравенства, есть *бесконечно малая*, пределом которой служит нуль.

Отсюда мы заключаем окончательно, что поверхность S тела вращения определяется формулой:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (7)$$

где y и $\frac{dy}{dx}$ должны быть определены из уравнения вращающейся кривой, т. е. из $y = f(x)$.

Формулу (7) можно написать в виде:

$$S = 2\pi \int_a^b y ds, \quad (7^*)$$

ибо

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Для памяти: элементом поверхности является боковая поверхность бесконечно тонкого усеченного круглого конуса, имеющего образующей элемент ds дуги и окружностью среднего сечения $2\pi y$. Значит, элемент поверхности равен $2\pi y ds$ (рис. 42).

Пример 1. Дуга кубической параболы

$$a^2 y = x^3$$

между точками $x=0$ и $x=a$ вращается около оси OX . Найти поверхность тела вращения.

Решение. Имеем $y' = \frac{3x^2}{a^2}$. Отсюда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 + 9x^4} dx.$$

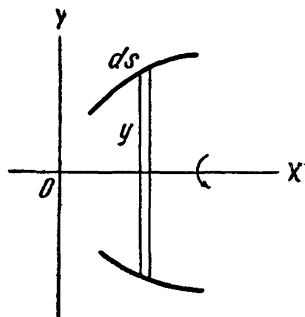


Рис. 42

Элемент поверхности, следовательно, равен:

$$2\pi y \, ds = \frac{2\pi}{a^4} \sqrt{(a^4 + 9x^4)} x^3 \, dx.$$

Поэтому по 7*

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi}{a^4} \int_0^a \sqrt{(a^4 + 9x^4)} x^3 \, dx = \frac{\pi}{27a^4} [V(a^4 + 9x^4)^3]_0^a = \\ &= \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) a^3 = 3,6 \dots a^3. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти площадь поверхности вращения, производимой вращением гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси OX .

Решение. Здесь

$$f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$f'(x) = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

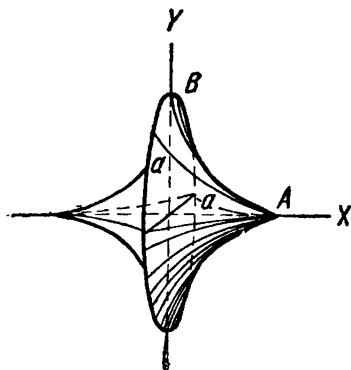


Рис. 43

Подставляя в (7) и замечая, что дуга BA произведет только половину искомой поверхности (рис. 43), имеем:

$$\frac{S}{2} = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx = 2\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{6}{5} \pi a^3.$$

Следовательно,

$$S = \frac{12}{5} \pi a^3.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти поверхность шара, производимого вращением круга $x^2 + y^2 = r^2$ вокруг диаметра.

Отв. $4\pi r^2$.

2. Найти площадь поверхности, производимой вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг OX от вершины до точки, в которой $x = 3a$.

Отв. $\frac{56}{3} \pi a^2$.

3. Найти интегрированием площадь поверхности конуса, производимого вращением вокруг оси OX прямой, соединяющей начало с точкой (a, b) .

Отв. $\pi b \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Найти поверхность тора, производимого вращением круга

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

вокруг оси OX .

Отв. $4\pi^2 ab$.

У к а з а н и е. Положительное значение $\sqrt{a^2 - x^2}$ дает внешнюю поверхность, а отрицательное — внутреннюю.

5. Вычислить поверхность, производимую вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \text{ вокруг оси } OX \text{ от } x = 0 \text{ до } x = a. \text{ Отв. } \frac{\pi a^2}{4} (e^2 - e^{-2} + 4).$$

6. Найти поверхность, производимую вращением вокруг оси OX кардиониды $x = a(2 \cos \theta - \cos 2\theta)$, $y = a(2 \sin \theta - \sin 2\theta)$. Отв. $\frac{128}{5} \pi a^2$.

7. Показать, что поверхность, производимая вращением циклоиды $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ вокруг оси OX , равна $\frac{64}{3} \pi a^2$, а вокруг оси OY равна $16\pi^2 a^2$.

8. Показать, что если кривую $y^2 + 4x = 2 \ln y$ вращать вокруг оси OX от $y = 1$ до $y = 2$, то произведенная поверхность равна $\frac{10}{3} \pi$.

9. Найти площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси OX дуги каждой из следующих кривых:

a) $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = \infty$,

Отв. $\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

b) петли кривой $9ay^3 = x(3a - x)^2$,

Отв. $3\pi a^2$.

c) петли кривой $8a^2y^2 = a^2x^2 - 4x^4$.

Отв. $\frac{\pi a^2}{4}$.

10. Найти площадь поверхности, образуемой вращением дуги каждой из нижеследующих кривых: 1) вокруг оси OX ; 2) вокруг оси OY :

a) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отв. $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsin e$; $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}$,

где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (эксцентриситет эллипса).

b) $x = e^\theta \sin \theta$, $y = e^\theta \cos \theta$ от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Отв. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2)$; $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (2e^\pi + 1)$.

§ 54. Тела с известными поперечными параллельными сечениями. В § 49 было показано, каким образом вычисляется объем тела вращения посредством простого интегрирования. Очевидно, тело вращения можно рассматривать как образованное движущимся кругом, центр которого лежит на оси вращения, а плоскость круга к ней перпендикулярна, причем радиус круга изменяется. Так, на рисунке 44 можно предположить, что круг $ABCD$, плоскость которого перпендикулярна к оси OX , производит тело вращения $OEGFH$, в то время как центр его движется от O к N , а радиус $MC (= y)$ непрерывно изменяется с изменением $MO (= x)$ по закону, определяемому уравнением плоской кривой, вращением которой можно произвести это тело.

Покажем теперь, каким образом можно приложить эту мысль к вычислению объемов тел, не представляющих собой тел вращения,

когда возможно площади параллельных плоских сечений тела представить функциями их расстояний от неподвижной точки.

Разобьем тело, изображенное на рисунке 45, на n слоев плоско-стями, перпендикулярными к оси OX , и примем начало координат за

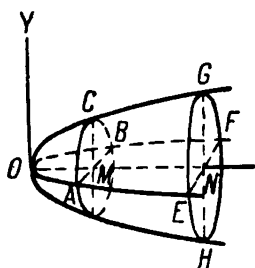


Рис. 44

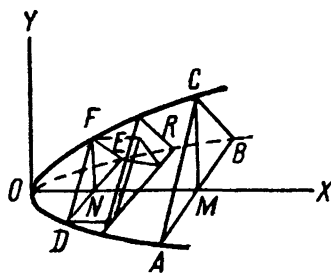


Рис. 45

упомянутую выше неподвижную точку. Пусть FDE есть одно из сечений тела. Построим на этом сечении прямую призмочку, второе основание которой лежит на следующем сечении тела.

Так как, по предположению, площадь сечения FDE есть функция ON , т. е. x , обозначим эту площадь через $f(x)$, и пусть Δx есть высота призмы.

Следовательно, $f(x)\Delta x$ есть элемент объема V тела и искомый объем V есть предел суммы объемов призм при неограниченном возрастании числа делений n при условии, что все Δx стремятся к нулю. Таким образом, получаем:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

Очевидно, что тело $OABC$ (рис. 45) можно рассматривать как тело, образованное сечением DEF , перемещающимся непрерывно при изменении x от 0 до OM . Ниже следующие примеры служат иллюстрацией этой идеи.

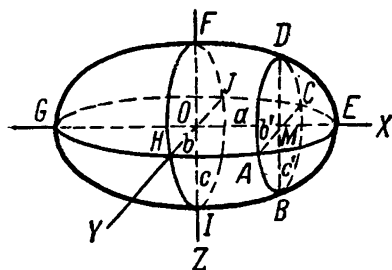


Рис. 46

Пример 1. Вычислить объем трехосного эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Можно предположить, что эллипсоид образован движением переменного эллипса $ABCD$ (рис. 46) от точки E к точке G , так что центр его M находится на оси OX , а плоскость его

перпендикулярна к этой оси. Ясно, что оси b' и c' переменного эллипса $ABCD$ (а следовательно, и его площадь) будут функциями абсциссы $x = OM$, определяющей его положение.

Чтобы найти ось b' , рассмотрим эллипс $GHEJ$ в плоскости XOY , уравнение которого есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решая это уравнение относительно y ($= b'$) в функции x ($= OM$), имеем:

$$b' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Подобным образом уравнение эллипса $EFGI$ в плоскости XOZ дает:

$$c' = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Отсюда площадь сечения по эллипсу $ABCD$ будет:

$$\pi b'c' = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) = f(x).$$

Подставив в (8), имеем:

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

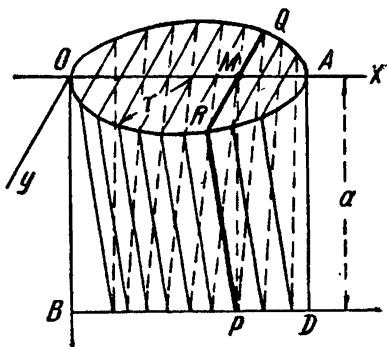


Рис. 47

Пример 2. Найти объем прямого коноида¹ с круглым основанием, если радиус основания есть r , а высота a .

Решение. Расположив оси координат, как показано на рисунке 47, рассмотрим сечение PQR , перпендикулярное OX . Это сечение в прямом коноиде всегда есть равнобедренный треугольник, а так как

$$MP = a \text{ и } RM = \sqrt{2rx - x^2}$$

(последнее находим, решая относительно y уравнение $x^2 + y^2 = 2rx$ круга $ORAQ$), то площадь этого сечения будет:

$$a\sqrt{2rx - x^2} = f(x).$$

Подстановка в (8) даст:

$$V = a \int_0^{2r} \sqrt{2rx - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi r^2 a.$$

Это — как раз половина объема цилиндра с теми же основаниями и высотой.

¹ Рассматривая приложенное решение этой задачи, учащийся легко поймет, каково определение коноида.

ЗАДАЧИ

1. Точка пересечения диагоналей квадрата перемещается вдоль диаметра круга радиуса a ; при этом плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности. Найти объем тела, образуемого этим движущимся квадратом.

Отв. $\frac{8}{9} a^3$.

2. Равносторонний треугольник перемещается так, что плоскость, в которой он лежит, все время остается перпендикулярной оси OX , а вершины основания движутся соответственно вдоль ветвей парабол $y^2 = 16ax$ и $y^2 = 4ax$, расположенных над осью OX . Найти объем тела, которое образовано движущимся треугольником, если он перемещается от начала координат до точки, абсцисса которой равна a .

Отв. $\frac{\sqrt{3}}{2} a^3$.

3. Окружность перемещается таким образом, что одна из ее точек остается все время на оси OY , центр описывает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а плоскость, в которой лежит окружность, все время перпендикулярна оси OY . Найти объем тела, описываемого окружностью.

Отв. $\frac{8}{3} \pi a^2 b$.

§ 55. О применении интегрального исчисления в естествознании. Выше, в § 44, мы указали ту общую схему, по которой интегральное исчисление прилагается к решению многих задач естествознания.

Эта схема состоит из трех шагов.

Первый шаг. Искомую величину V разбиваем на безгранично увеличивающееся число n бесконечно умалющихся частиц.

Второй шаг. Частицы эти выражают так, чтобы их сумма получила вид $\Phi(\xi_0) \Delta x_0 + \Phi(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$.

Третий шаг. Переходя к пределу, получают решение в виде:

$$V = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

При этом мы указали (см. § 46), что самым трудным является сделать второй шаг, т. е. выразить частицу в виде парного произведения $\Phi(\xi_i) \Delta x_i$, ибо это выражение должно быть *абсолютно точным*, без какой-либо погрешности, как бы мала она ни была. Трудность подыскать для частицы такое выражение настолько велика, что чаще всего второго шага совсем не делают, а, взамен этого, просто указывают, что предел суммы $\Phi(x_0) \Delta x_0 + \Phi(x_1) \Delta x_1 + \dots + \Phi(x_{n-1}) \Delta x_{n-1}$ «хорошо согласуется» с нашим представлением об искомой величине V .

Чтобы избежать этой смутной ссылки на наше представление, достаточно доказать, что вовсе не нужно выражать частицу в виде парного произведения $\Phi(\xi_i) \Delta x_i$ с абсолютной точностью, ибо окончательный результат будет тем же самым, когда частицы и эти произведения разнятся друг от друга на бесконечно малые равномерно-высшего порядка.

Переходим к разъяснению сказанного

1. *Равномерные бесконечно малые*. Рассмотрим переменные величины

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \quad (1)$$

число которых m беспрестанно возрастает благодаря тому, что к ним справа приписывают все новые и новые переменные величины. Такие переменные

величины (1) называются *равномерными бесконечно малыми*, когда для всякого заданного положительного ϵ , начиная с некоторого момента времени, будут удовлетворяться *сразу все*, без исключения, неравенства:

$$|\alpha| < \epsilon, \quad |\beta| < \epsilon, \quad |\gamma| < \epsilon, \quad \dots, \quad |\mu| < \epsilon. \quad (2)$$

Смысл этого определения тот, что среди бесконечно малых $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ нет *запаздывающих* в своем стремлении к пределу нуль.

Примером такого запаздывания могут служить переменные величины $\alpha = \frac{1}{t}, \beta = \frac{2}{t}, \gamma = \frac{3}{t}, \dots$. Каждая из них занимает какое-нибудь определенное место i в ряду (1) и, значит, стремится к нулю, когда t безгранично увеличивается, ибо дробь $\frac{i}{t}$, при фиксированном числителе i , с возрастанием целого t бесконечно уменьшается. Однако во всякий момент времени неравенства (2) все сразу никогда не соблюдаются, ибо всегда имеем $\mu = \frac{m}{t} = 1$. Значит, хотя каждая из переменных величин (1), взятая в отдельности, *т. е. стоящая на определенном месте*, есть величина бесконечно малая, однако все вместе они уже не суть *равномерно* бесконечно малые.

2. *Равномерно-высший порядок*. Если мы имеем две строки равномерных бесконечно малых:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha^*, & \beta^*, & \gamma^*, & \dots, & \mu^*, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots, & \mu, \end{array} \quad (3)$$

то первая строка рассматривается как составленная из бесконечно малых *равномерно-высшего порядка* по отношению к бесконечно малым второй строки, когда отношения

$$\frac{\alpha^*}{\alpha}, \frac{\beta^*}{\beta}, \frac{\gamma^*}{\gamma}, \dots, \frac{\mu^*}{\mu} \quad (4)$$

суть равномерные бесконечно малые.

3. *Равномерная равносильность*. Равномерные бесконечно малые, образующие две строки:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots, & \mu, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots, & \mu', \end{array} \quad (6)$$

называются *равномерно-равносильными*, когда их разности

$$\alpha - \alpha', \quad \beta - \beta', \quad \gamma - \gamma', \quad \dots, \quad \mu - \mu' \quad (5)$$

суть бесконечно малые *равномерно-высшего порядка*.

Обозначая эти разности соответственно через $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \dots, \mu^*$, мы имеем равенства:

$$\alpha = \alpha' + \alpha^*, \quad \beta = \beta' + \beta^*, \quad \gamma = \gamma' + \gamma^*, \quad \dots, \quad \mu = \mu' + \mu^*, \quad (6)$$

которые словесно читаются так:

бесконечно малые $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \mu'$, равномерно-равносильные данным бесконечно малым $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$, получаются из $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ отбрасыванием (зачеркиванием или опусканием) у них частей равномерно-высшего порядка.

Это следствие очень важно, так как имеет уже *практическое значение*; имея данными суммы:

$$\alpha = \alpha' + \alpha^*, \quad \beta = \beta' + \beta^*, \quad \gamma = \gamma' + \gamma^*, \quad \dots, \quad \mu = \mu' + \mu^*$$

бесконечно малых, мы просто *зачеркиваем в них бесконечно малые* $\alpha^*, \beta^*, \dots, \mu^*$ *равномерно-высшего порядка*, полученные новые бесконечно малые

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots, \mu'$$

оказываются равномерно-равносильными данным $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$.

Теорема. Для того чтобы бесконечно малые (3) были равномерно-равносильными, необходимо и достаточно, чтобы разности:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - 1, \frac{\beta'}{\beta} - 1, \frac{\gamma'}{\gamma} - 1, \dots, \frac{\mu'}{\mu} - 1 \quad (7)$$

были равномерными бесконечно малыми.

Доказательство. Вводя обозначения для этих разностей:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \alpha'', \quad \frac{\beta'}{\beta} - 1 = \beta'', \quad \frac{\gamma'}{\gamma} - 1 = \gamma'', \quad \dots, \quad \frac{\mu'}{\mu} - 1 = \mu'',$$

мы находим:

$$\alpha = \alpha' - \alpha\alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta\beta'', \quad \gamma = \gamma' - \gamma\gamma'', \quad \dots, \quad \mu = \mu' - \mu\mu''. \quad (8)$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (6), мы видим, что необходимым и достаточным условием равномерной равносильности бесконечно малых (3) является равномерно-высший порядок бесконечно малых $\alpha\alpha'', \beta\beta'', \gamma\gamma'', \dots, \mu\mu''$ по отношению к $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы переменные величины $\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots, \mu''$ были равномерными бесконечно малыми. ч. т. д.

4. Принцип интегрального исчисления в первой форме.

Основная теорема I. Предел суммы равномерных бесконечно малых одного и того же знака $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ не изменится, когда мы заменим эти бесконечно малые другими: $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \mu'$, им равномерно-равносильными.

Доказательство. Предположим $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ положительными. По условию, бесконечно малые $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \mu'$ им равномерно-равносильны. Это означает, что имеем равенства (8), где $\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots, \mu''$ суть равномерные бесконечно малые. Поэтому, для любого фиксированного $\varepsilon, \varepsilon > 0$, начиная с некоторого момента, имеем неравенства:

$$|\alpha''| < \varepsilon, \quad |\beta''| < \varepsilon, \quad |\gamma''| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |\mu''| < \varepsilon. \quad (9)$$

Отсюда, из равенства (8), следуют неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \varepsilon\alpha &< \alpha < \alpha' + \varepsilon\alpha \\ \beta' - \varepsilon\beta &< \beta < \beta' + \varepsilon\beta \\ \mu' - \varepsilon\mu &< \mu < \mu' + \varepsilon\mu \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

сложив которые, имеем:

$$\Sigma\alpha' - \varepsilon\Sigma\alpha < \Sigma\alpha < \Sigma\alpha' + \varepsilon\Sigma\alpha.$$

Отсюда находим:

$$1 - \varepsilon < \frac{\Sigma\alpha'}{\Sigma\alpha} < 1 + \varepsilon.$$

Так как ε может быть взято как угодно малым, то отсюда следует, что

$$\lim \frac{\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \mu'}{\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu} = 1 \quad (11)$$

Это и доказывает, что обе суммы $\alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \mu'$ и $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$ имеют тот же самый предел: конечный, или бесконечный, или нулевой.

Ч. т. д.

5. *Принцип интегрального исчисления во второй форме.* Если бесконечно малые $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ имеют разные знаки, предыдущая основная теорема I может оказаться ложной. Чтобы поправить дело, надо ввести одно дополнительное условие на бесконечно малые разных знаков $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$.

Определение. Сумма $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$ бесконечно малых называется *абсолютно-ограниченной*, когда сумма их абсолютных величин $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \dots + |\mu|$ ограничена, т. е. если имеем сохраняющимся все время неравенство

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \dots + |\mu| < K,$$

где K есть положительная постоянная величина.

Основная теорема II. При отыскании точного предела абсолютно-ограниченной суммы бесконечно малых все их можно заменить равномерно-равносильными, не изменив величины этого предела.

Доказательство. Пусть $\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu$ — абсолютно-ограниченная сумма бесконечно малых, точный предел $\lim \sigma$ которой нам нужно найти. Так как σ есть, по условию, абсолютно-ограниченная сумма бесконечно малых, то мы должны все время иметь неравенство:

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \dots + |\mu| < K, \quad (12)$$

где K есть положительная постоянная величина.

Пусть новые бесконечно малые $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \mu'$ равномерно-равносильны данным бесконечно малым $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$; обозначим через σ' сумму новых бесконечно малых:

$$\sigma' = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots + \mu'.$$

Вычитая из прежней суммы новую сумму σ' , имеем:

$$\sigma - \sigma' = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') + \dots + (\mu - \mu'). \quad (13)$$

Из равенства (8) мы находим:

$$\alpha - \alpha' = -\alpha''\alpha, \beta - \beta' = -\beta''\beta, \gamma - \gamma' = -\gamma''\gamma, \dots, \mu - \mu' = -\mu''\mu, \quad (14)$$

где $\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots, \mu''$ суть равномерные бесконечно малые. Это означает, что для всякого заданного $\varepsilon, \varepsilon > 0$, начиная с некоторого момента, имеем неравенства:

$$|\alpha''| < \varepsilon, |\beta''| < \varepsilon, |\gamma''| < \varepsilon, |\mu''| < \varepsilon. \quad (15)$$

Сопоставляя неравенства (14) и (15), мы имеем неравенства:

$$|\alpha - \alpha'| < \varepsilon \cdot |\alpha|, |\beta - \beta'| < \varepsilon \cdot |\beta|, \dots, |\mu - \mu'| < \varepsilon \cdot |\mu|,$$

[складывая которые, находим:

$$|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + \dots + |\mu - \mu'| < \varepsilon (|\alpha| + |\beta| + \dots + |\mu|) < \varepsilon \cdot K. \quad (16)$$

С другой стороны, из равенства (13) следует

$$|\sigma - \sigma'| \leq |\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + \dots + |\mu - \mu'|.$$

В силу (16) имеем: $|\sigma - \sigma'| < \varepsilon K$.

Так как K есть постоянная величина, а ε — произвольно малое, то имеем:

$$\lim (\sigma - \sigma') = 0,$$

откуда

$$\lim \sigma = \lim \sigma'.$$

Ч. т. д.

6. *Заключение.* Проще всего принцип интегрального исчисления применяется в виде следующего **практического правила**.

При вычислении предела абсолютно-ограниченной суммы бесконечно малых всегда можно пренебрегать бесконечно малыми равномерно-высшего порядка.

Действительно, пренебрегая бесконечно малыми равномерно-высшего порядка, мы просто заменяем данные бесконечно малые другими, им равномерно-равносильными. Но *принцип* интегрального исчисления именно и позволяет делать такую замену, когда дело идет о пределах абсолютно-ограниченных сумм бесконечно малых.

§ 56. **Центр тяжести.** Пусть имеем систему n материальных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$, массы которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_n . Мы предполагаем эти точки *неизменно связанными друг с другом*. Вес p_i точки M_i есть вертикальная сила, величина которой равна $m_i g$, где g — ускорение силы тяжести, одинаковое для всех тел. Масса m всей системы равна сумме масс отдельных точек: $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ и вес p всей системы также равен сумме весов отдельных точек: $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Механика доказывает, что точка $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, координаты $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ которой определены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \\ \bar{y} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \\ \bar{z} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i z_i}{m} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

также является *неизменно связанной с системой точек* M_1, M_2, \dots, M_n , и что, если приложить в этой точке M силу p , направленную вверх, то эта система будет в *равновесии* в любом *положении*, если она была неподвижной.

Эта точка $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ называется *центром тяжести системы точек* M_1, M_2, \dots, M_n .

Также механика доказывает, что, когда мы не знаем центра тяжести всей системы, но знаем центры тяжести отдельных ее частей, на которые она мысленно разбивается, то центр тяжести всей системы еще продолжает даваться *теми же самыми формулами* (1), но только под m_1, m_2, \dots, m_n надо разумеать массы уже не точек, а этих отдельных частей системы, а под $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$, соответственно, их центры тяжести.

Это предположение механики имеет чрезвычайную важность, ибо на нем основано разыскание центров тяжести уже непрерывных систем: *линий, кусков поверхностей и тел*. С этой целью пре-

вращают суммирования в интегрирования, предполагая, что материя распределена в данном теле непрерывно, т. е. без каких-либо пропусков. Благодаря чему происходит превращение физических задач в задачи чистой геометрии.

Для этого начинают с предположения об однородности непрерывной системы; непрерывная система называется *однородной*, когда во всех своих точках она являет одно и то же физическое строение. Ее *плотность* ρ есть тогда постоянное отношение массы произвольной части этой системы к протяжению (длине, площади, объему) этой части. Если m есть масса рассматриваемой части системы, v — ее протяжение, а ρ — плотность *всей системы*, то мы имеем $\rho = \frac{m}{v}$, откуда $m = \rho \cdot v$ и, таким образом, рассмотрение механического понятия массы m сводится на рассмотрение пропорциональной ей *геометрической протяженности* v .

Далее, простейшие геометрические системы позволяют быстро находить их центры тяжести, ибо они всегда совпадают с их геометрическими центрами, когда они у них имеются. Так, например, центр тяжести прямоугольника или параллелепипеда совпадает с его геометрическим центром, центр тяжести отрезка прямой есть его середина и т. д.

Пользуясь этим, *сначала* разбивают мысленно данную непрерывную систему, центр тяжести которой надо найти, на чрезвычайно мелкие частицы, которые принимают за простые геометрические элементы¹ с легко находимыми у них центрами тяжести, *затем*, при помощи формул (1), отыскивают центр тяжести суммы этих элементов и, *наконец*, переходя к пределу, т. е. заставляя частицы безгранично уменьшаться и число их n безгранично увеличиваться, мы в пределе получаем искомый центр тяжести данной непрерывной системы, причем *суммы, стоящие в формулах (1), превращаются в интегралы*:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm}. \quad (2)$$

Если, как было сказано, рассматриваемую непрерывную систему мы принимаем за однородную, то тогда имеем $m = \rho v$, где ρ — постоянное (= плотность всей системы), m — масса части системы, а v — ее

¹ Пренебрегая бесконечно малыми равномерно-высшего порядка (см. предыдущий §).

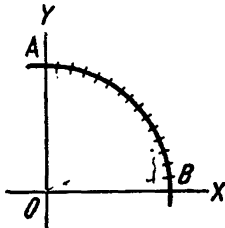
протяжение. В этом случае имеем $dm = \rho dv$, и формулы (2) переписываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x \rho dv}{\int \rho dv} = \frac{\rho \int x dv}{\rho \int dv} = \frac{\int x dv}{V} \\ \bar{y} &= \frac{\int y dv}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dv}{V}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и, аналогично:

где V — протяжение (т. е. длина, площадь или объем) всей (т. е. целой) данной непрерывной системы.

Если же данная непрерывная система неоднородна, тогда отношение массы к протяжению, т. е. $\frac{m}{v}$, зависит от той части системы, которую вырезают (мысленно) из системы, и в этом случае это отношение носит название *средней плотности*. Когда же эта часть системы стягивается в точку, тогда средняя плотность $\frac{m}{v}$ этой части стремится к пределу ρ , который называется *плотностью системы в точке*. В этом случае мы имеем $\rho = \frac{dm}{dv}$, и ρ , как величину *переменную*, зависящую от рассматриваемой точки (x, y, z) системы, т. е. как являющуюся *функцией* $\rho(x, y, z)$, уже нельзя выносить за знак интегрирования. Следовательно, формулы (2) для неоднородных непрерывных систем получают вид:



$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dv}{\int \rho dv}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dv}{\int \rho dv}, \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dv}{\int \rho dv}. \quad (4)$$

Рис. 48

Чтобы вычислить интегралы, входящие в полученные формулы, подынтегральные выражения должны быть выражены через одно переменное. Пределы интегрирования определяются конкретными условиями задачи.

Пример 1. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной в первом квадранте.

Решение. Разбиваем дугу окружности на n частей ds (рис. 48); обозначив через ρ линейную¹ плотность кривой, получим:

$$dm = \rho ds.$$

¹ Под *средней линейной плотностью* подразумевается отношение массы точек, покрывающих дугу, к длине ее. Под *линейной плотностью в точке* подразумевается предел средней плотности, когда дуга стягивается в точку.

Следовательно,

$$\bar{x} = \frac{\int \rho x \, ds}{\int \rho \, ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int \rho y \, ds}{\int \rho \, ds}.$$

Считая плотность постоянной, выносим ρ за знаки интегралов и сокращаем. Тогда знаменатель каждой дроби становится равным просто s . Чтобы вычислить числители, применяем известную формулу $ds^2 = dx^2 + dy^2$, откуда в нашем случае $ds = \frac{a}{y} dx = -\frac{a}{x} dy$, причем, так как за начало отсчета длины дуги s принимается точка A , то для $ds > 0$ dx есть величина положительная, а dy — отрицательная.

Следовательно:

$$\int x \, ds = - \int_a^0 a \, dy = a^2, \quad \int y \, ds = \int_0^a a \, dx = a^2, \quad \int ds = \frac{\pi a}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2a}{\pi}.$$

Пример 2. Найти центр тяжести четверти окружности примера 1 при условии, что линейная плотность дуги изменяется пропорционально длине дуги, отсчитываемой от точки B .

Решение. В этом случае

$$dm = ks \cdot ds.$$

Для того чтобы легче выполнить интегрирование, воспользуемся уравнениями окружности в параметрической форме:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi.$$

Тогда получим:

$$\bar{x} = \frac{\int s x \, ds}{\int s \, ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \varphi \, d\varphi} = \frac{4\pi - 8}{\pi^2} a;$$

$$\bar{y} = \frac{\int s y \, ds}{\int s \, ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \varphi \, d\varphi} = \frac{8a}{\pi^2}.$$

Пример 3. Найти центр тяжести площади, ограниченной параболой $y^2 = 4px$, осью OX и ординатой точки (h, k) кривой (рис. 49).

Решение. Разобьем площадь фигуры на n частей. Тогда элементарная площадь будет равна $y dx$, где y — ордината точки кривой. Обозначая поверхностную плотность площади через ρ , будем иметь:

$$dm = \rho y dx,$$

и эту массу в случае, когда $\rho = \text{const}$, можно считать сосредоточенной в точке $(x, \frac{y}{2})$ элементарной площади. Тогда

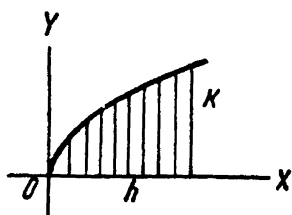


Рис. 49

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x \rho y dx}{\int_0^h \rho y dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^h \frac{y}{2} \rho y dx}{\int_0^h \rho y dx}.$$

Выражая y через x , из уравнения кривой получаем:

$$\int_0^h xy dx = 2p^{\frac{1}{2}} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5} p^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} h^2 k,$$

$$\frac{1}{2} \int_0^h y^2 dx = 2p \int_0^h x dx = ph^2 = \frac{1}{4} hk^2,$$

$$\int_0^h y dx = 2p^{\frac{1}{2}} \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} hk.$$

Следовательно, считая плотность ρ постоянной, имеем:

$$\bar{x} = \frac{3}{5} h, \quad \bar{y} = \frac{3}{8} k.$$

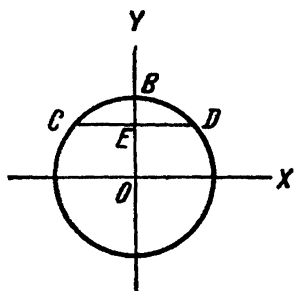


Рис. 50

Пример 4. Найти центр тяжести сферического сегмента, образованного вращением площади BDE (рис. 50) вокруг оси OY , причем известно, что $OB = a$ и $OE = c$.

Решение. Разобьем сегмент плоскостями, перпендикулярными оси OY , на n элементарных объемов. Объем элементов равен $\pi x^2 dy$, и поэтому

$$dm = \rho \pi x^2 dy.$$

Массу этого элемента, в случае $\rho = \text{const}$, можно представить себе сосредоточенной в точке $(0, y)$, т. е. в центре основания элемента. Следовательно, в этом случае абсцисса тяжести сегмента $x = 0$, а ордината

$$\bar{y} = \frac{\int_c^a y (\rho \pi x^2 dy)}{\int_c^a \rho \pi x^2 dy} = \frac{\int_c^a (a^2 y - y^3) dy}{\int_c^a (a^2 - y^2) dy} = \frac{3}{4} \frac{(a+c)^2}{2a+c}.$$

Пример 5. Найти центр тяжести поверхности сферического сегмента примера 4.

Решение. Разбиваем поверхность на элементы плоскостями, перпендикулярными оси OY . Тогда площадь элемента поверхности будет равна $2\pi x ds$, и

$$dm = 2\pi\rho x ds \quad (\rho = \text{const}).$$

Массу этого элемента можно считать сосредоточенной в точке $(0, y)$. Из уравнения окружности найдем: $ds = \frac{ady}{x}$, и, следовательно,

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\int xy ds}{\int x ds} = \frac{\int_c^a y dy}{\int_c^a dy} = \frac{a+c}{2}.$$

ЗАДАЧИ¹

1. Найти центр тяжести полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной над осью OX .

Отв. $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$.

2. Найти центр тяжести дуги гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, расположенной над осью OX .

Отв. $\left(0, \frac{2a}{5}\right)$.

3. Найти центр тяжести площади четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

Отв. $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

4. Найти центр тяжести тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = 0, y = b$.

Отв. $\bar{y} = \frac{9}{16}b$.

5. Найти центр тяжести тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4px$, осью OX и прямой $x = a$.

Отв. $\bar{x} = \frac{2a}{3}$.

6. Найти центр тяжести площади, ограниченной полукубической параболой $ay^2 = x^3$ и двойной произвольной ординатой.

Отв. $\left(\frac{5h}{7}, 0\right)$, где $x = h$ — уравнение ординаты.

7. Найти центр тяжести площади, ограниченной дугой синусоиды и отрезком оси OX от $x = 0$ до $x = \pi$.

Отв. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

¹ Во всех задачах предполагается, что плотность постоянна.

8. Найти центр тяжести площади, заключенной между параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ и осями координат.

$$\text{Отв. } \left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5} \right).$$

9. Найти центр тяжести дуги цепной линии $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ от точки, имеющей абсциссу $x = 0$, до точки, абсцисса которой $x = a$.

$$\text{Отв. } \left(\frac{2a}{e+1}, \frac{a(e^4 + 4e^2 + 1)}{4e(e^2 - 1)} \right).$$

10. Найти центр тяжести площади гипоциклоиды $x = a \cos^3 \varphi$, $y = a \sin^3 \varphi$, содержащейся в первом квадранте.

$$\text{Отв. } \left(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi} \right).$$

11. Найти центр тяжести площади, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, окружностью $x^2 + y^2 = a^2$ и осью OY , лежащей в первом квадранте.

$$\text{Отв. } \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4(a+b)}{3\pi} \right).$$

12. Найти центр тяжести дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ между первыми двумя точками циклоиды, лежащими на оси OX .

$$\text{Отв. } \left(\pi a, \frac{4}{3} a \right).$$

13. Показать, что центр тяжести кругового сектора лежит на биссектрисе

центрального угла α , на расстоянии $\frac{2}{3} a \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ от вершины (a — радиус

круга).

14. Найти центр тяжести поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси одной петли лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

$$\text{Отв. } \bar{x} = \frac{a}{3} (\sqrt{2} + 1).$$

15. Показать, что площадь поверхности, образуемой вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости кривой, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги вращающейся кривой.

16. Показать, что объем тела, образуемого вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести площади фигуры.

§ 57. Давление жидкости. Работа. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о вычислении величины давления жидкости на вертикальную пластинку, погруженную в жидкость.

Предположим, что $ABCD$ (рис. 51) представляет часть вертикальной пластинки, погруженной в жидкость, например часть вертикальной стенки резервуара, наполненного жидкостью. Требуется вычислить величину давления жидкости на эту площадку. Расположим оси координат, как указано на чертеже, где ось OY выбрана совпадающей

с уровнем жидкости. Разделим отрезок AB на n небольших интервалов и построим n прямоугольников, как это сделано на рисунке 51. Площадь одного прямоугольника (например, прямоугольника EM) равна $y \cdot \Delta x$. Если бы этот прямоугольник был расположен в горизонтальной плоскости на глубине x , считая от уровня жидкости в сосуде, то величина давления жидкости на прямоугольник была бы равна $wxy\Delta x^1$, где w — вес единицы объема жидкости. Так как давление жидкости во все стороны одинаково, то отсюда следует, что $wxy\Delta x$ есть элемент величины давления на пластинку. Следовательно, величина давления P на всю пластинку $ABCD$ будет равна:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w x_i y_i \Delta x_i = w \int_a^b x y dx. \quad (5)$$

Для фактического вычисления по формуле (5) следует выразить y как функцию x из уравнения кривой CD , ограничивающей пластинку.

В дальнейшем вес кубического метра воды будем считать равным 1000 кг ($=w$).

Пример. Лежащая горизонтально труба, поперечным сечением которой является круг диаметра 6 м, наполовину наполнена водой. Найти величину давления воды на вертикальную заслонку, закрывающую трубу.

Решение. Уравнение окружности есть

$$x^2 + y^2 = 9,$$

следовательно, $y = \sqrt{9 - x^2}$; далее, $w = 1000$, пределы интегрирования суть $a = 0$ и $b = 3$.

Подставляя эти значения в формулу (1), получим величину давления на вертикальную часть заслонки, расположенную вправо от оси OX (рис. 52):

$$1000 \int_0^3 x \sqrt{9 - x^2} dx = \left[-\frac{1000}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 9000.$$

Следовательно, величина давления на всю заслонку:

$$P = 2 \cdot 9000 = 18000 \text{ кг.}$$

¹ Величина давления жидкости на горизонтальную площадку равна весу столба жидкости, имеющего эту площадку своим основанием и высотой — расстояние площадки от свободной жидкости.

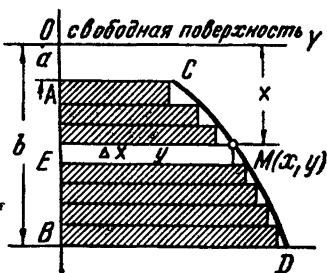


Рис. 51

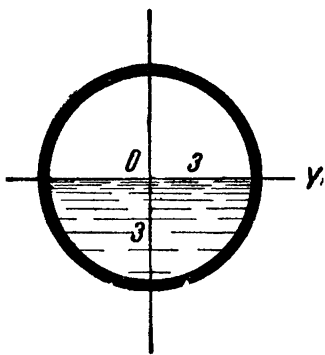


Рис. 52

ЗАДАЧИ

1. Найти величину давления на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если известно, что основание его равно 8 м, высота 12 м, верхнее основание параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 м. Отв. 1056 т.

2. Плотина имеет форму трапеции, две горизонтальные стороны которой имеют соответственно 400 м и 100 м, а высота равна 20 м. Верхнее, более длинное основание лежит на уровне свободной поверхности воды. Найти величину давления на плотину. Отв. 40 000 т.

3. Найти величину давления на поверхность шара, имеющего диаметр, равный 6 м, если шар погружен в воду так, что его центр находится на глубине 10 м относительно свободной поверхности воды. Отв. 360 000 π кг.

У к а з а н и е. Величина давления равна:

$$2\pi w \int_{-3}^{+3} y(10+x) ds, \text{ где } ds = \frac{3dx}{y}.$$

Работа. Если величина силы, действующей по направлению движения, постоянна, то под работой, произведенной силой, подразумевают произведение силы на путь $s_1 - s_0$, пройденный материальной точкой, где s_1 обозначает конечную, а s_0 — начальную точку движения. Если сила переменная, то работа может быть определена только с помощью предельного перехода. Мы разбиваем весь отрезок пути от s_0 до s_1 на n частей и предполагаем, что в каждом частичном небольшом интервале сила имеет постоянное значение, например то значение $f(s)$, какое она принимает в некоторой произвольно взятой точке s этого интервала. Тогда произведение $f(s)ds$ дает нам элементарную работу, а *полная работа* W , произведенная силой, выразится так:

$$W = \lim \sum f(s) ds = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds. \quad (6)$$

Если направление действующей силы совпадает с направлением движения, то произведенная работа *положительна* (положительно затраченная работа), в противоположном случае работа *отрицательна* (приобретенная работа).

Пример. Вычислить работу, производимую при растягивании пружины на 5 см, если известно, что сила, которая требуется для растяжения пружины, пропорциональна удлинению x пружины и что для удлинения пружины на 1 см требуется сила, равная 1 кг.

Решение. Действующая сила в настоящем примере равна, очевидно, kx , где k — коэффициент пропорциональности. Так как для удлинения пружины на 1 см требуется сила в 1 кг, то при $x = 1$, сила $kx = k \cdot 0,01 = 1$, откуда $k = 100$. Пружина растягивается от положения равновесия $x_0 = 0$ до конечного положения $x_1 = 0,05$. Следовательно, по формуле (6) будем иметь:

$$W = \int_0^{0,05} 100x dx = 50 [x^2]_0^{0,05} = 0,125 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

ЗАДАЧИ

1. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x — длина пути, проходимого за время t . Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости. Найти работу, производимую сопротивлением при передвижении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$.

Отв. $\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2 a^7}$, где k — коэффициент сопротивления.

2. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого равен 20 м (рис. 53).

Отв. $2,5 \cdot 10^6 \pi$ кг · м.

У к а з а н и е. Рассмотрим сечение резервуара плоскостью, перпендикулярной оси вращения, на расстоянии x от свободной поверхности жидкости. Площадь этого сечения равна πy^2 . На площадь рассматриваемой площадки действует вес столба жидкости, имеющего площадку своим основанием и координату x высотой, т. е. сила $\pi \rho y^2 x$, где ρ — вес единицы объема жидкости. Эта сила может быть представлена приложенной к центру тяжести площадки и действующей по направлению оси вращения, т. е. оси OX . Поэтому сила $f(x)$, фигурирующая в формуле (6), выразится теперь в виде $\pi \rho y^2 x$, и искомая работа W выразится формулой:

$$W = \pi \rho \int_a^b x y^2 dx.$$

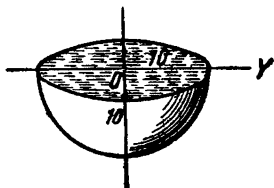


Рис. 53

Рассмотрим еще несколько примеров, характеризующих методы приложения интегрального исчисления.

Пример 1. С какой силой тонкий прямой однородный стержень AB всюду одинаковой толщины, имеющий длину l и массу M , притягивает материальную точку N массы m (рис. 54), лежащую на продолжении линии стержня на расстоянии a от одного из его концов?

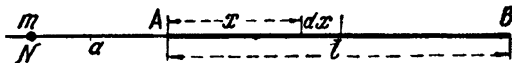


Рис. 54

Решение. Представим себе, что стержень разделен на равные бесконечно малые части (= элементы) длины dx . Так как масса всего стержня равна M , то масса элемента dx равна $\frac{M}{l} \cdot dx$, ибо масса единицы длины стержня равна $\frac{M}{l}$.

По закону Ньютона, притяжение между любыми двумя массами выражается равенством:

$$\text{сила притяжения} = \text{const} \times \frac{\text{произведение масс}}{(\text{расстояние между ними})^2}.$$

Поэтому сила притяжения между точкой N и элементом стержня равна

$$\delta \cdot \frac{m \cdot \frac{M}{l} dx}{(x+a)^2},$$

где $\delta = \text{const}$, что и дает *элемент искомой силы притяжения*. Полное же притяжение между точкой N и стержнем, будучи пределом суммы всех таких элементарных притяжений от $x=0$ до $x=l$, будет:

$$\int_0^l \delta \frac{M}{l} \frac{mdx}{(x+a)^2} = \delta \frac{Mm}{l} \int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2} = -\delta \frac{Mm}{a(a+l)}.$$

Полагая в этом примере, что точка N находится на перпендикуляре, восстановленном в середине стержня, на расстоянии a от него, найти силу, с которой стержень притягивает точку.

Отв. $\delta \frac{2mM}{al} \arctg \frac{l}{2a}$.

Пример 2. Сосуд, имеющий вид прямого круглого конуса (рис. 55), наполнен водой. Если высота его h , а радиус основания r , то сколько времени нужно будет, чтобы он сам собою опорожнился через отверстие площади a при его вершине?

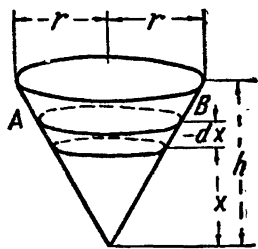


Рис. 55

Решение. Известно, что если пренебречь всеми осложняющими явление сопротивлениями, то скорость истечения через отверстие равна скорости, приобретаемой телом, свободно падающим с высоты, равной глубине воды в сосуде. Следовательно, обозначая эту глубину буквой x , имеем:

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Пусть в элемент времени dt вытекает объем dQ воды, а соответствующее понижение поверхности назовем dx . В единицу времени вытекает из отверстия объем воды $a\sqrt{2gx}$, измеряемый прямым цилиндром, площадь основания которого есть a , а высота $v (= \sqrt{2gx})$. Следовательно, в течение времени dt вытекает

$$dQ = a\sqrt{2gx} dt. \quad (a)$$

Но объем воды, вытекшей за время dt , можно также рассматривать как объем цилиндра AB , у которого площадь основания равна S , а высота равна dx , отсюда:

$$dQ = S dx = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{h^2}. \quad (b)$$

Приравняв (a) и (b) и решая относительно dt , имеем: $dt = \frac{\pi r^2 x^3 dx}{ah^2 \sqrt{2gx}}$, откуда

$$t = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^3 dx}{ah^2 \sqrt{2gx}} = \frac{2\pi r^2 \sqrt{h}}{5a \sqrt{2g}}.$$

Пример 3. Идеальный газ, заключенный в цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем, расширяясь, увеличивается в объеме, передвигая при этом поршень. Найти работу, совершаемую силой давления газа на поршень, если известно, что объем газа увеличивается от величины v_0 до v_1 . Температуру предполагаем неизменяющейся.

Решение. Пусть c — площадь поперечного сечения сосуда. Если обозначим через dv приращение объема газа, то выражение $\frac{dv}{c}$ даст соответствующую приращению dv величину перемещения поршня.

На основании закона Бойля — Мариотта имеем: $pv = k = \text{const}$, откуда $p = \frac{k}{v}$ равно силе давления газа на единицу площади поршня и $P = \frac{kc}{v}$ равно силе давления на всю площадь поршня. Следовательно, работа, соответствующая приращению объема dv , равна

$$\frac{kc}{v} \cdot \frac{dv}{c} \quad (\text{сила давления} \times \text{перемещение поршня}),$$

откуда

$$W = \int_{v_0}^{v_1} \frac{k}{v} dv = k \ln \frac{v_1}{v_0}.$$

ГЛАВА V

ФОРМАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫМИ ПРИЕМАМИ

§ 58. Введение. Интегрирование называется *формальным*, когда его, в конце концов, сводят на использование таблицы интегралов. Если в каком-нибудь рассматриваемом случае эта таблица не имеет интеграла, похожего на заданный интеграл, часто все же оказывается возможным так преобразовать этот последний, чтобы он зависел *только от формул, образующих эту таблицу*.

Различными приемами такого сведения на таблицу являются:

- а) *интегрирование по частям*;
- б) *применение теории рациональных дробей*;
- в) *использование подходящей подстановки*.

Первый прием мы уже рассмотрели в § 18. Изложим два оставшиеся приема.

§ 59. Интегрирование рациональных дробей. Рациональная дробь есть такая дробь, у которой числитель и знаменатель суть многочлены, т. е. целые рациональные функции. Если степень числителя равна или больше степени знаменателя, то дробь может быть обращена в смешанное выражение делением числителя на знаменатель. Например,

$$\frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1} = x^2 + x - 3 + \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Последнее слагаемое есть дробь, *приведенная к простейшему виду*, так как степень числителя меньше степени знаменателя. Очевидно, что целые члены интегрируются прямо, и, следовательно, остается рассмотреть только эту дробь.

Для интегрирования такой дроби часто бывает необходимо разложить ее на так называемые *простые элементы*, т. е. заменить алгебраической суммой *новых дробей*, вид и способы интегрирования которых приведены дальше. В алгебре доказывается, что такое разложение всегда осуществимо, если мы умеем знаменатель разложить на действительные множители — линейные или квадратные.

Случай 1. Множители знаменателя все первой степени и не повторяются. В алгебре доказывается, что всякому неповторяющемуся множителю первой степени, например $x - a$, содержа-

щеломуся в знаменателе $F(x)$, будет соответствовать простой элемент вида $\frac{A}{x-a}$. Такую дробь можно тотчас же интегрировать следующим образом:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln(x-a) + C.$$

Пример. Найти: $\int \frac{(2x+3) dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.

Решение. Множители знаменателя суть x , $x-1$, $x+2$; полагаем:

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}, \quad (1)$$

где A, B, C — подлежащие определению постоянные. Освободив (1) от дробей, имеем:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + C(x-1)x = \\ &= (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как это равенство есть тождество, то, следуя *методу неопределенных коэффициентов*, приравняем коэффициенты одинаковых степеней x в обеих частях и получаем три совместные уравнения:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ A + 2B - C &= 2, \\ -2A &= 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Решив эти уравнения, найдем:

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

Подстановка в (1) этих значений дает:

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}. \quad (1')$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= -\frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x+2) + \ln c = \ln \frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

Более краткий способ нахождения значений A, B и C из (2) таков. Положив в равенстве (2) $x=0$, имеем: $3 = -2A$, или $A = -\frac{3}{2}$. Положив $x=1$, имеем: $5 = 3B$, или $B = \frac{5}{3}$. Положив $x=-2$, имеем: $-1 = 6C$, или $C = -\frac{1}{6}$.

ЗАДАЧИ

1. $\int \frac{(x-1) dx}{x^2+6x+8} = \ln \frac{c(x+4)^{\frac{5}{3}}}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}.$
2. $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2+x-6} = \ln [c(x+3)^2(x-2)].$
3. $\int \frac{(x^2+x-1) dx}{x^3+x^2-6x} = \ln \sqrt[6]{x(x-2)^3(x+3)^2} + C.$
4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C.$
5. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{x^3}{2} - 2x + \frac{1}{6} \ln \frac{x-1}{(x+1)^3} + \frac{16}{3} \ln(x+2) - C.$
6. $\int \frac{(a-b)y dy}{y^2-(a+b)y+ab} = \ln \frac{(y-a)^a}{(y-b)^b} + C.$
7. $\int \frac{(t^2+pq) dt}{t(t-p)(t+q)} = \ln \frac{(t-p)(t+q)}{t} + C.$
8. $\int \frac{(2z^3-5) dz}{z^4-5z^2+6} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} + C.$

Случай 2. Множители знаменателя все первой степени и некоторые повторяются. В алгебре доказывается, что в этом случае каждому n -кратному множителю первой степени, например $(x-a)^n$, содержащемуся в знаменателе $F(x)$, будет соответствовать сумма n следующих простых элементов:

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \dots + \frac{L}{x-a},$$

где A, B, \dots, L суть постоянные.

Последняя дробь интегрируется, как в случае 1. Все остальные интегрируются по формуле *степени*. Так:

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Пример. Найти $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx.$

Решение. Так как $x-1$ входит множителем трижды, полагаем:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Освобождаясь от дробей, получаем:

$$\begin{aligned} x^3+1 &= A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2 = \\ &= (A+D)x^3 + (-3A+C-2D)x^2 + (3A+B-C+D)x - A. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , находим систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} A + D &= 1, \\ -3A + C - 2D &= 0, \\ 3A + B - C + D &= 0, \\ -A &= 1. \end{aligned}$$

Решая их, находим: $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$ и

$$\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= -\ln x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2 \ln(x-1) + C = \\ &= -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{x} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \ln \frac{x-2}{x-1} + C.$
- $\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x} = \frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^3}{x^2} + C.$
- $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3} = \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \frac{x^2}{(x+1)^3} + C.$
- $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2} = -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} + \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + C.$
- $\int \frac{y^2 dy}{y^3+5y^2+8y+4} = \frac{4}{y+2} + \ln(y+1) + C.$
- $\int \frac{dt}{(t^2-2)^3} = -\frac{t}{4(t^2-2)} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} + C.$
- $\int \frac{as^2 ds}{(s+a)^3} = a \ln(s+a) + \frac{2a^2}{s+2} - \frac{a^3}{2(s+a)^2} + C.$
- $\int \left(\frac{m}{z+m} - \frac{nz}{(z+n)^2} \right) dz = \ln(z+m)^m (z+n)^{-n} - \frac{n^2}{z+n} + C.$
- $\int \frac{3x^3+1}{(x^3-1)^3} dx = -\frac{x}{(x^3-1)^2} + C.$

Случай 3. Знаменатель содержит неповторяющиеся множители второй степени, не распадающиеся на действительные линейные множители. В алгебре доказывается, что в этом случае каждому неповторяющемуся квадратному множителю, например $x^2 + px + q$, содержащемуся в знаменателе $F(x)$, будет соответствовать один простой элемент вида

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Эту дробь можно интегрировать в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{(Ax+B) dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{\left(Ax + \frac{Ap}{2} - \frac{Ap}{2} + B\right) dx}{x^2+px+q} = \\ &= \int \frac{\left(Ax + \frac{Ap}{2}\right) dx}{x^2+px+q} + \int \frac{\left(-\frac{Ap}{2} + B\right) dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{x^2+px+q} + \frac{2B-Ap}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \end{aligned}$$

[дополнив знаменатель второго интеграла до полного квадрата]

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Здесь следует заметить, что *квадратный трехчлен* x^2+px+q при изменяющемся аргументе x не может никогда обращаться в нуль. Ибо если бы этот трехчлен обратился для какого-нибудь действительного числа x в нуль, то это означало бы, что квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет один действительный корень α . Но тогда и другой корень β этого квадратного уравнения также был бы действительным и тогда мы имели бы тождество:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

А мы предположили, что трехчлен x^2+px+q не распадается на действительные линейные множители.

По этой же причине *трехчлен* x^2+px+q не может изменять знака (ибо тогда он имел бы действительный корень). Поэтому он всегда *положителен*, как бы не изменялся аргумент x (ибо он положителен при $x=+\infty$).

Сущность этих замечаний та, что мы его всегда имеем право логарифмировать и писать $\ln(x^2+px+q)$, не боясь попасть на логарифм отрицательного количества.

Здесь же надо добавить, что мы имеем *обязательное* неравенство $p^2-4q < 0$ и, значит, всегда $4q-p^2 > 0$, ибо только при этом неравенстве, как учит элементарная алгебра, уравнение $x^2+px+q=0$ не имеет действительного корня. Поэтому выражение $\sqrt{4q-p^2}$ есть *положительное число*.

Пример. Найти $\int \frac{4dx}{x^3+4x}$.

Решение. Полагаем $\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Освобождаясь от дробей, имеем:

$$4 = A(x^2+4) + x(Bx+C) = (A+B)x^2 + Cx + 4A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим:

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 4A=4,$$

откуда

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=0,$$

так что

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{4dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2+4} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \ln c = \ln \frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

ЗАДАЧИ

- $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$
- $\int \frac{(2x^2-3x-3) dx}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \ln \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C.$
- $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctg x + C.$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctg x + C.$
- $\int \frac{(x^3-6) dx}{x^4+6x^2+8} = \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
- $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^3}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
- $\int \frac{(3x-7) dx}{x^3+x^2+4x+4} = \ln \frac{x^2-4}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C.$
- $\int \frac{z^2 dz}{z^4+z^2-2} = \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{z}{\sqrt{2}} + C.$
- $\int \frac{4dt}{t^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \arctg \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C.$
- $\int \frac{dy}{1-y^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{y^2+y+1}{y^2-2y+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C.$

Случай 4. Знаменатель содержит множители второй степени, не распадающиеся на действительные линейные множители, причем некоторые из них повторяются. В алгебре доказывается, что в этом случае каждому n -кратному квадратному

множителю, например $(x^2 + px + q)^n$, содержащемуся в знаменателе $F(x)$, соответствует сумма n простых элементов вида

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{Lx + N}{x^2 + px + q}. \quad (A)$$

Принимая во внимание степень знаменателя, самым старшим является *первое* слагаемое этой суммы, а самым младшим — *последнее*.

Последнее слагаемое интегрировать мы уже умеем, ибо этому посвящен разобранный *случай 3*.

Чтобы выполнить интегрирование старшего слагаемого, необходимо пользоваться «формулой приведения»:

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{u}{(u^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right], \quad (B)$$

которая сводит интегрирование высшего простого элемента $\frac{1}{(u^2 + a^2)^n}$ на интегрирование более низкого простого элемента $\frac{1}{(u^2 + a^2)^{n-1}}$.

В истинности формулы приведения (B) учащийся имеет возможность убедиться прямым ее дифференцированием.

К указанным простым элементам сводится и общий случай, когда p не равно нулю, ибо мы можем пополнить квадрат в знаменателе:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4q - p^2),$$

где обязательно $4q - p^2 > 0$. Полагая $x + \frac{p}{2} = u$, $\frac{1}{4}(4q - p^2) = a^2$,

мы имеем $x^2 + px + q = u^2 + a^2$, причем $dx = du$, $x = u - \frac{p}{2}$.

Значит, общий случай приводится так:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{A^*u + B^*}{(u^2 + a^2)^n} du = \frac{A^*}{2} \int \frac{2u du}{(u^2 + a^2)^n} + \\ &+ B^* \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{A^*}{2} \int \frac{d(u^2 + a^2)}{(u^2 + a^2)^n} + B^* \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \\ &= \frac{A^*(u^2 + a^2)^{-n+1}}{2(1-n)} + B^* \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что благодаря формуле приведения (B) интеграл старшего слагаемого в формуле (A) приводится к нахождению интеграла того же вида, но в нем квадратный множитель стоит в степени только $n-1$. Применяя формулу приведения (B) последовательно $n-1$ раз, мы, очевидно, в конце концов приведем наш интеграл к показателю степени $n=1$. А показатель $n=1$ изучен в *случае 3*.

Таким же образом можно интегрировать все простые элементы в формуле (А), кроме самого последнего, интегрирование которого показано в *случае 3*.

Пример. Показать:

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = \ln(x^2 + 1) + \frac{1 + 3x}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

Решение. Так как $x^2 + 1$ входит дважды как множитель, мы должны иметь:

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Освобождаясь от знаменателя, имеем:

$$2x^3 + x + 3 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Действуя по *методу неопределенных коэффициентов*, т. е. приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x и решая, мы находим:

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 2, \quad D = 0.$$

Значит:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \\ &= \ln(x^2 + 1) - \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части берется по формуле интеграла степени IV, а второй требует однократного применения редукционной формулы (В), где $u = x$, $a = 1$, $n = 2$. Таким образом, мы получаем:

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \left[\frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right] + C.$$

Делая приведение подобных членов, получаем ответ.

Заключение. Так как нетрудно убедиться, что всякую рациональную функцию всегда можно привести к частному двух целых рациональных функций, т. е. к рациональной дроби, то из предыдущих параграфов этой главы следует, что любую рациональную функцию, знаменатель которой мы умеем разложить на действительные множители первой и второй степеней, можно представить в виде алгебраической суммы целых рациональных функций и простых элементов. Члены этой суммы все имеют такой вид, интегрирование которого нами выполнено выше. Отсюда:

Теорема. Можно найти интеграл каждой рациональной функции, знаменатель которой мы умеем разложить на действительные множители первой и второй степеней; этот интеграл выражается через алгебраические, логарифмические и обратные тригонометрические (круговые) функции, т. е. в конце концов, через элементарные функции.

ЗАДАЧИ

1. Найти:

$$\int \frac{(x^3 + x^2 + 2) dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

Решение. Так как $x^2 + 2$ встречается множителем дважды, полагаем:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}.$$

Освобождаясь от дробей, имеем:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2 &= Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 2) = \\ &= Cx^3 + Dx^2 + (A + 2C)x + B + 2D. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , найдем:

$$C = 1, \quad D = 1, \quad A + 2C = 0, \quad B + 2D = 2.$$

Отсюда:

$$A = -2, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 2}$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3 + x^2 + 2) dx}{(x^2 + 2)^2} &= -\int \frac{2x dx}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{x dx}{x^2 + 2} + \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{x^2 + 2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{2 - x}{4(x^2 + 2)} + \ln(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$3. \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C.$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 3)^2} dx &= \frac{5}{2(x^2 + 2)} + \frac{10}{x^2 + 3} + \\ &+ \frac{19}{2} \ln(x^2 + 2) - 9 \ln(x^2 + 3) + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{(4x^2 - 8x) dx}{(x-1)^2 (x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2 + 1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} + \arctg x + C.$$

$$6. \int \frac{(3x + 2) dx}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{13x - 24}{3(x^2 - 3x + 3)} + \frac{26}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2x - 3}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 60. Интегрирование подстановкой нового переменного; рационализация. В последнем параграфе было показано, что все рациональные функции (выражения), знаменатели которых мы умеем разложить на действительные множители второй и первой степени, могут быть проинтегрированы до конца. Что же касается алгебраических функций, которые *не являются рациональными функциями*, которые, например, содержат радикалы, то, говоря относительно, только небольшая часть таковых может быть проинтегрирована до

конца, т. е. имеет интегралы, выражаемые через элементарные функции. Однако подстановкой нового переменного сказанные функции *в некоторых случаях* можно преобразовать в такие, которые либо прямо содержатся в таблице, либо предстанут в рациональном виде.

Метод интегрирования функции, которая сама не является рациональной, посредством подстановки старого переменного через функцию нового переменного так, чтобы результат подстановки представил в рациональном виде, называется *методом рационализации*.

Это — чрезвычайно важный прием интегрирования, и мы должны рассмотреть некоторые важные случаи этого рода.

Дифференциалы, содержащие дробные степени одного x . Такое выражение можно преобразовать в рациональную форму посредством подстановки $x = z^n$, где n и есть наименьший общий знаменатель дробных показателей x . Ибо таким путем x , dx и каждый радикал (т. е. всякую дробную степень) можно выразить рационально в функции z .

Пример. Найти:

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Решение. Этот пример можно решить, непосредственно разделив числитель на знаменатель и представив интеграл в виде суммы двух интегралов; покажем теперь другой способ решения путем преобразования подынтегрального выражения в рациональную форму посредством подстановки. Так как общее наименьшее кратное знаменателей дробных показателей равно 12, полагаем

$$x = z^{12}.$$

Здесь

$$dx = 12z^{11} dz, \quad x^{\frac{2}{3}} = z^8, \quad x^{\frac{1}{4}} = z^3, \quad x^{\frac{1}{2}} = z^6.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx &= \int \frac{z^8 - z^3}{z^6} 12z^{11} dz = 12 \int (z^{13} - z^8) dz = \\ &= \frac{6}{7} z^{14} - \frac{4}{3} z^9 + C = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C \end{aligned}$$

[подставив обратное значение z в функции x , именно $z = x^{\frac{1}{12}}$].

Общая форма интеграла от здесь рассматриваемых иррациональных выражений есть

$$\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots) dx,$$

где α, β, \dots суть рациональные числа и где $R(x, y, z, \dots)$ есть рациональная функция от букв x, y, z, \dots .

Дифференциалы, содержащие дробные степени одного $a+bx$. Такое выражение можно преобразовать в рациональную форму посредством подстановки

$$a+bx = z^n,$$

где n — наименьший знаменатель дробных показателей выражения $a+bx$. Ибо таким образом x , dx и каждый радикал (т. е. всякую входящую в рассматриваемое выражение дробную степень $a+bx$) можно выразить рационально в функции z .

Пример. Найти:

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Пусть

$$1+x = z^2;$$

тогда:

$$dx = 2z dz, \quad (1+x)^{\frac{3}{2}} = z^3, \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = z.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} &= \int \frac{2z dz}{z^3 + z} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + C = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1+x)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

{подставив обратно значение z в функции x }.

Общая форма рассмотренного здесь интеграла есть

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\beta, \dots \right] dx,$$

где $R(x, y, z, \dots)$ есть рациональная функция от букв x, y, z, \dots и где α, β, \dots — рациональные числа. Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$, где n — общий наименьший знаменатель рациональных чисел α, β, \dots

ЗАДАЧИ

$$1. \int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1} = \frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{4}} - \ln \left(x^{\frac{3}{4}} + 1 \right) \right] + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{3} x^{\frac{3}{8}} + 2 \ln \frac{x^{\frac{1}{8}} - 1}{x^{\frac{1}{8}} + 1} + 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^{\frac{1}{8}} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \ln \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + 1} + C.$$

$$4. \int \frac{x dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2 \sqrt{a+bx}} + C.$$

$$5. \int y \sqrt{a+y} dy = \frac{2}{15} (3y-2a)(a+y)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx = x+1 + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1}-1) + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln(1+\sqrt[3]{x+1}) + C.$$

$$8. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

$$9. \int x^4 \sqrt[4]{x-2} dx = \frac{20x+32}{45} (x-2) \sqrt[4]{x-2} + C.$$

$$10. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+a}} = \frac{6x-9a}{10} \sqrt[3]{(x+a)^2} + C.$$

§ 61. Дифференциальный бином. Так называется интеграл, имеющий вид:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

где a и b — любые постоянные, отличные от нуля, а числа m , n и p — рациональные.

Подстановкой

$$x^n = t, \quad \text{т. е.} \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

интеграл превращается в

$$\frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bt)^p dt.$$

Полагая $q = \frac{m+1}{n} - 1$, имеем более простой вид интеграла от дифференциального бинома:

$$\psi(p, q) = \int (a+bt)^p t^q dt.$$

Лемма. Интеграл $\psi(p, q)$ рационализуется, когда одно из трех чисел p , q , $p+q$ есть целое.

Доказательство.

Случай 1. Число p — целое. В этом случае интеграл $\psi(p, q)$ пишется, очевидно, так:

$$\psi(p, q) = \int R(t, t^q) dt$$

и, значит, интегрируется по правилу предыдущего параграфа, т. е. методом рационализации.

Случай 2. Число q — целое. В этом случае $\psi(p, q)$ пишется в виде

$$\psi(p, q) = \int R[(a + bt)^p, t] dt$$

и, значит, интегрируется по правилу предыдущего параграфа.

Случай 3. Число $p + q$ — целое. В этом случае имеем:

$$\psi(q, p) = \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{p+q} dt = \int R \left[\left(\frac{a + bt}{t} \right)^p, t \right] dt$$

и, значит, опять интегрируется по правилу предыдущего параграфа.

Ч. т. л.

Из леммы следует:

Теорема. Дифференциальный бином $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ интегрируется методом рационализации и, значит, дает результат, выражимый в алгебраических, логарифмических и обратных тригонометрических (круговых) функциях, если одно из трех чисел: $\frac{m+1}{n}$, p , $\frac{m+1}{n} + p$ есть целое.

Знаменитый отечественный математик Чебышев в 1853 году доказал, что, если ни одно из указанных трех чисел не есть целое, интеграл от дифференциального бинома уже невыразим через алгебраические функции и элементарные трансцендентные функции и, значит, не может быть взят никаким методом.

Указанные три условия носят название условий фактической интегрируемости дифференциального бинома.

Пример 1.
$$\int \frac{x^3 dx}{(a + bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int x^3 (a + bx^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

Решение. $m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$, так что $\frac{m+1}{n} = 2$, числу целому. Следовательно, пример относится к случаю 1; полагаем

$$a + bx^2 = z^2,$$

откуда

$$x = \left(\frac{z^2 - a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{z dz}{b^{\frac{1}{2}} (z^2 - a)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{и} \quad (a + bx^2)^{\frac{3}{2}} = z^3.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \left(\frac{z^2-a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{z^3} \frac{z dz}{b^{\frac{1}{2}} (z^2-a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b^2} \int (1-az^{-2}) dz = \\ &= \frac{1}{b^2} (z + az^{-1}) + C = \frac{1}{b^2} \frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C.\end{aligned}$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$

Решение. $m = -4$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n} + p = -2$, числу целому. Следовательно, пример относится к случаю 3; полагаем

$$1+x^2 = z^2 x^2, \quad z = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x},$$

откуда

$$x^2 = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad 1+x^2 = \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}};$$

далее

$$x = \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x^4 = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \quad \text{и} \quad dx = -\frac{z dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = z - \frac{z^3}{3} + C = \frac{(2x^2 - 1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C.$$

ЗАДАЧИ

1. $\int x^3 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x^2-2)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{15} + C.$
2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$
3. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2-2}{3} + C.$
4. $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{Cx}{\sqrt{a^2-x^2}+a}.$
5. $\int \frac{dx}{x^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{1}{x} \right) + C.$

$$6. \int t^3 (1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}} dt = (1 + 2t^2)^{\frac{5}{2}} \frac{5t^2 - 1}{70} + C.$$

$$7. \int u (1 + u)^{\frac{3}{2}} du = \frac{2}{35} (1 + u)^{\frac{5}{2}} (5u - 2) + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 (a + x^3)^{\frac{5}{3}}} = - \frac{3x^3 + 2a}{2a^2 x (a + x^3)^{\frac{2}{3}}} + C.$$

§ 62. Преобразование тригонометрических дифференциалов.

Теорема. Интеграл вида $\int R(\sin u, \cos u) du$, где $R(x, y)$ есть рациональная функция от букв x и y , рационализуется подстановкой $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$, т. е. заменой:

$$\sin u = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad du = \frac{2dz}{1 + z^2}.$$

Доказательство. Формула тригонометрии говорит, что $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$. Возвышая в квадрат, имеем $\operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$.

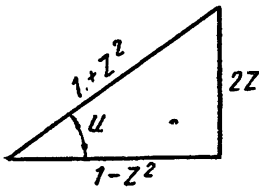


Рис. 56

Полагая $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$ и решая относительно $\cos u$, имеем:

$$\cos u = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике (рис. 56) с гипотенузой $1 + z^2$ и горизонтальным катетом $1 - z^2$ угол, прилежащий к этому катету, в точности равен u . Так как другой катет равен, очевидно, $2z$, то мы заключаем отсюда, что $\sin u = \frac{2z}{1 + z^2}$. Из равенства $z = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ мы находим $u = 2 \operatorname{arctg} z$.

Отсюда $du = \frac{2dz}{1 + z^2}$.

Из того обстоятельства, что $\sin u$, $\cos u$ и du выражаются рационально через букву z , следует рационализация всякого интеграла вида $\int R(\sin u, \cos u) du$, где $R(x, y)$ — рациональное выражение от букв x и y .

Отсюда же следует, что если тригонометрический дифференциал содержит, кроме $\sin u$ и $\cos u$, еще и $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, scu , $\operatorname{csc} u$, то это несколько не усложняет дела и не мешает рационализации, ибо $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, scu и $\operatorname{csc} u$ выражаются в виде дробей от $\sin u$ и $\cos u$.

Ч. Т. Д.

Пример. $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

Решение. Так как этот дифференциал рационален относительно $\sin x$ и $\cos x$, то, совершив указанную подстановку, тотчас имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\left(1 + \frac{2z}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} \left(1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} &= \frac{1}{2} \int (z + 2 + z^{-1}) dz = \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2} + 2z + \ln z\right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

- $\int \frac{dx}{4 - 5 \sin x} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right) + C.$
- $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
- $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin 2x} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3} \right) + C.$
- $\int \frac{dx}{5 - 4 \cos 2x} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (3 \operatorname{tg} x) + C.$
- $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C.$
- $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x} = \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C = \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C.$
- $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C = x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

8. Вывести по способу этого параграфа формулы (XIV) и (XV) § 8.

§ 63. Разные подстановки. Рассмотренные до сих пор подстановки приводили данное дифференциальное выражение к рациональному виду. Однако в большом числе случаев можно выполнять интегрирование посредством подстановок, не приводящих данного дифференциала к рациональному виду. Для этих подстановок нельзя дать никакого общего правила, а можно руководствоваться только опытом, приобретенным упражнениями.

Вот одна из весьма употребительных подстановок:

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2}.$$

Приведем пример на эту подстановку.

Пример. Найти:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx.$$

Решение. Сделав подстановку

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

найдем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= - \int (a^2 z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} z dz = - \frac{(a^2 z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} a^2} + C = \\ &= - \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. $\int \frac{dx}{x(a^3 + x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{a^3 + x^3} + C.$ Положить $x^3 = z.$
2. $\int \frac{x^2 - x}{(x-2)^3} dx = \ln(x-2) - \frac{3x-5}{(x-2)^2} + C.$ Положить $x-2 = z.$
3. $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^4} = \frac{18x^2 + 27x + 11}{6(x+1)^3} + \ln(x+1) + C.$ Положить $x+1 = z.$
4. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$ Положить $x = \frac{a}{z}.$
5. $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{cx}{a + \sqrt{a^2 + x^2}}.$ Положить $x = \frac{a}{z}.$
6. $\int \frac{x^3 dx}{(x^3 + 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{8} (x^2 - 3)(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} + C.$ Положить $x^3 + 1 = z.$
7. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x+x^2}} = \ln \frac{cx}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}.$ Положить $x = \frac{1}{z}.$
8. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \frac{2}{3} (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$ Положить $1+\ln x = z.$
9. $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^x + 2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{4}{21} (3e^x - 4)(e^x + 1)^{\frac{3}{4}} + C.$ Положить $e^x + 1 = z.$
10. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(e^x - 2) + C.$ Положить $e^x = z.$
11. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C.$ Положить $x = \cos z.$
12. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$ Положить $x = a \sin z.$

ГЛАВА VI

РЯДЫ

§ 64. Бесконечные последовательности. Последовательность чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ называют *бесконечной*, если за каждым членом этой последовательности имеется дальнейший. Такова, например, последовательность натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$.

Задать последовательность — это значит указать способ вычисления любого ее члена s_n по его номеру n ; в этом смысле последовательности:

$$\begin{aligned} &1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots, \\ &2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots, \\ &1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \\ &\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \end{aligned}$$

считаются заданными. В первом случае s_n определяется по формуле $s_n = n^2$, во втором $s_n = 2^n$, в третьем $s_n = \frac{1}{n}$ и в четвертом $s_n = \frac{1}{n+1}$.

С изменением n меняется и s_n ; следует поэтому сказать, что s_n *есть функция от n* . Может случиться, что при неограниченном возрастании n переменная величина s_n будет иметь своим пределом некоторое число A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = A.$$

Мы скажем тогда, что *последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ имеет число A своим пределом*. Так, например, из написанных



Рис. 57

выше последовательностей третья имеет своим пределом нуль, а четвертая единицу. В общем случае, если на прямой линии мы распо-

ложим точки с абсциссами $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, то эти точки в конце концов все окажутся заключенными в отрезке с центром в точке A и как угодно малом (рис. 57). Вне такого отрезка будет находиться лишь *конечное* число точек последовательности (см. часть I, § 29, рис. 40).

§ 65. Признаки существования предела последовательности. Для заданной последовательности $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ чрезвычайно важно уметь установить, имеет ли она предел, даже если бы мы не могли точно вычислить величину этого предела.

Укажем ряд случаев, когда существование этого предела легко установить.

Допустим, во-первых, что члены последовательности идут, все время возрастаая или, точнее, не убывая, когда n неограниченно возрастает; другими словами, допустим, что для всякого n имеем:

$$s_{n+1} \geq s_n.$$

Могут представиться два случая:

или s_n неограниченно возрастает вместе с n , т. е., как бы велико ни было число N , члены последовательности, начиная с некоторого s_n , оказываются все больше N ; это именно имеет место, например, в последовательности натуральных чисел $1, 2, \dots, n, \dots$;

или же все числа $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ меньше некоторого фиксированного числа B , и тогда s_n при неограниченном возрастании n стремится к пределу A , меньшему или равному B .

Учащийся легко этому поверит; предложение это покажется ему достаточно правдоподобным, если он рассмотрит на прямой *точки* $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, абсциссы которых равны *числам* $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$. Каждая точка, по предположению, правее предыдущей или совпадает с ней; значит, *либо* точки неограниченно удаляются вправо, *либо*, если они должны все оставаться левее некоторой фиксированной точки B , им приходится скопляться впереди некоторой точки A , к которой они неограниченно приближаются или с ней совпадают; точка A находится левее B или совпадает с B (рис. 58).

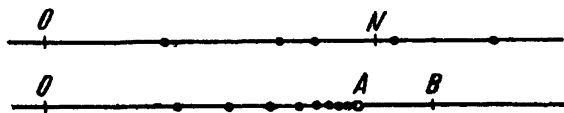


Рис. 58

Допустим, во-вторых, что члены последовательности $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ идут все время убывая или, точнее, не возрастаая, когда n неограниченно возрастает. Это означает, что для всякого n мы имеем:

$$s_{n+1} \leq s_n.$$

Здесь опять представляются два случая:

или s_n неограниченно (в алгебраическом смысле) убывает с возрастанием n , т. е., как бы велико ни было положительное N , члены последовательности, начиная с некоторого s_n , оказываются все меньше $-N$;

или же все числа $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ больше некоторого фиксированного числа B , и тогда s_n при неограниченном возрастании n стремится к пределу A , большему или равному B .

Геометрически дело представляется очень ясным: на некоторой прямой нанесены точки с абсциссами $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$. Каждая точка, по предположению, левее предыдущей или совпадает с ней; значит, *либо* точки неограниченно удаляются влево, *либо*, если они должны все оставаться правее некоторой фиксированной точки B , им приходится скопляться позади некоторой точки A , к которой они неограниченно приближаются или с ней совпадают; точка A находится правее B или совпадает с B (рис. 59).

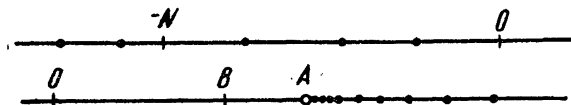


Рис. 59

Описанные оба рода последовательностей $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ называются **монотонными**. Следовательно, мы имеем предложение:

Теорема. *Монотонная последовательность чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ либо стремится к бесконечности определенного знака (т. е. положительной, или отрицательной), либо стремится к вполне определенному единственному конечному пределу.*

Значит, для монотонной последовательности чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ мы имеем:

либо $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ и, соответственно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$, *либо* $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$.

Полное доказательство изложенных фактов выходит из рамок этого курса.

Но, кроме монотонных последовательностей, имеются еще и *немонотонные последовательности чисел* $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$; это имя носят такие последовательности, члены s_n которых то возрастают, то убывают при безграничном увеличении значка n .

Иногда немонотонная последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ имеет предел, т. е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$. В этом случае члены s_n последовательности безгранично приближаются к числу A , когда их значок n увеличивается. Например, хотя последовательность $-\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4},$

$+\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \dots$, очевидно, немонотонная, однако она имеет предел, ибо $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$. Но иногда немонотонная последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ не имеет никакого предела. Например, последовательность $-1, +1, -1, +1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ немонотонна и не имеет, очевидно, никакого предела.

Полный признак существования конечного предела последовательности. Вот предложение, которое в силу его чрезвычайной важности мы здесь приводим, хотя и без исчерпывающего доказательства:

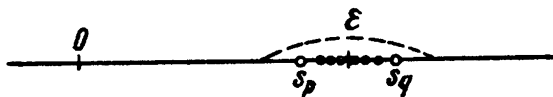


Рис. 60

для того чтобы последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε имелась такая грань N (зависящая от ε), за которой всякие два члена последовательности разнятся друг от друга не более, чем на ε .

Это означает, что мы должны иметь:

$$|s_p - s_q| < \varepsilon$$

при любых p и q , превосходящих N (рис. 60).

Условие это необходимо для существования конечного предела. Ибо если A есть конечный предел последовательности $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A.$$

А это означает, что имеем $|A - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всякого n , превышающего

некоторое фиксированное число N . В частности имеем $|A - s_p| < \frac{\varepsilon}{2}$ и

$|A - s_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, когда $p > N$ и $q > N$. Вычитая одно неравенство из другого, находим $|s_p - s_q| < \varepsilon$ для любых p и q , превосходящих грань N .

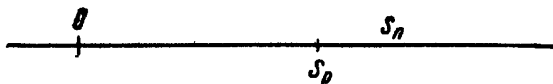


Рис. 61

Условие это достаточно для существования конечного предела. Ибо, когда оно выполнено, мы имеем $|s_n - s_p| < \varepsilon$ для фиксированного p , $p > N$ и для всякого n , превосходящего грань N . А это означает, что за границами фиксированного промежутка $\delta = (s_p - \varepsilon, s_p + \varepsilon)$ могут находиться только точки s_n со знаками n , не превосходящими грани N . Таких же точек имеется

не больше N . Значит, вся совокупность точек $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, кроме ограниченного числа их, охватывается фиксированным промежутком δ , длина которого равна 2ε , т. е. сколь угодно мала (рис. 61). А это и указывает на то, что точки $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ не могут накапливаться в бесконечном числе: ни около $+\infty$, ни около $-\infty$, ни около двух различных конечных точек A и B , $A \neq B$. Таким образом, местом сгущения точек $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ может служить лишь одна некоторая точка A , которая и явится пределом последовательности $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, т. е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A$.

Численные ряды

§ 66. Ряды. Когда бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ задана, называют *рядом* бесконечный символ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

в котором члены этой последовательности написаны с сохранением их порядка так, как если бы их прибавляли друг к другу; $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются *членами* ряда.

Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Если S_n стремится к определенному конечному пределу A , когда n неограниченно возрастает, то ряд называют *сходящимся* и число A его *суммой*. В этом случае (и только в этом случае) мы пишем условное равенство:

$$A = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

Если же S_n не имеет никакого конечного предела, тогда ряд (1) называется *расходящимся*. В этом случае он не имеет никакой суммы и не обозначает, вообще, ничего¹.

Рассмотрим, например, ряд

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots,$$

члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем r ; сумма n первых членов его

$$a + ar + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

¹ Если мы пользуемся расходящимися рядами, как что-то обозначающими мы можем быть втянуты в тяжелые ошибки даже в вычислениях. Например если ряд $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \dots$ имеет «сумму» A , то $A = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$. Далее $A = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots)$. Значит, $A = 1 + 2A$. Отсюда $2A - A = -1$ или $A = -1$. Но сумма положительных чисел не может быть отрицательным числом. Разгадка парадокса в том, что ряд $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ есть *расходящийся* и не обозначает *ничего*.

Предположим, что $|r| < 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^n}{1-r} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \right] = \frac{a}{1-r}.$$

Значит, когда $|r| < 1$, геометрическая прогрессия есть ряд сходящийся, и его сумма равна $\frac{a}{1-r}$.

Напротив, ряд

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

расходится, так как сумма его n первых членов равна n , т. е. неограниченно возрастает.

Но ряд может расходиться и без того, чтобы S_n безгранично возрастало вместе с n . Таков, например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

Здесь S_n либо единица, либо нуль, смотря по тому, будет ли n нечетное или четное; S_n при неограниченном возрастании n не стремится ни к какому пределу.

Так как сумма сходящегося ряда есть число совершенно определенное, а сумма расходящегося ряда и вообще не существует, то в любой задаче, где встречается бесконечный ряд, необходимо определить, сходится он или расходится. Это — проблема о существовании предела некоторой последовательности; вопрос сводится к тому, чтобы установить, стремится ли S_n к какому-нибудь пределу, когда n неограниченно возрастает.

§ 67. Необходимый признак сходимости. Для всякого ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

имеем:

$$S_n = u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

$$S_{n-1} = u_1 + \dots + u_{n-1},$$

а потому

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Если ряд сходится, то S_n стремится к определенному пределу A , S_{n-1} стремится к тому же самому пределу, а потому их разность u_n , т. е. n -й член ряда, стремится к нулю при неограниченном возрастании n .

Поэтому *необходимое* условие для сходимости ряда таково:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Другими словами, если n -й член ряда не стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то ряд расходится. Таков, например, ряд

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

Но это условие *не является достаточным*, т. е. если n -й член ряда стремится к нулю, мы еще не можем утверждать, что ряд сходится. В самом деле, так называемый *гармонический* ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расходится, хотя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Чтобы доказать расходимость этого ряда, напомним его в виде:

$$1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right] + \\ + \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \right] + \dots$$

и для сравнения подпишем под ним ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] + \\ + \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} \right] + \dots$$

Каждый член верхней строки больше или равен соответствующему члену нижней строки, но сумма членов, сгруппированных в каждой скобке нижней строки, равна $\frac{1}{2}$; поэтому сумму первых членов в нижней строке можно сделать как угодно большой, если только взять достаточное число членов; следовательно, и сумма n первых членов верхнего ряда неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n , т. е. ряд расходится.

Полный (необходимый и достаточный) признак сходимости ряда.

Мы доказали, что *если ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится*, то должны иметь: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Отсюда следует, что *если ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится*, то должны иметь:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+k}) = 0,$$

где k — какое-нибудь фиксированное число, ибо тогда в отдельности имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+k} = 0;$$

сумма же *фиксированного числа* бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Чрезвычайно важно теперь заметить следующее: *когда ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится, равенство*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}) = 0 \quad (3)$$

справедливо не только для фиксированного k , но и для k какого угодно, даже неограниченно возрастающего при увеличивающемся n .

Но еще более важно обратное предложение, а именно, что *если равенство (3) соблюдается при всяком k , тогда ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится.*

Другими словами: *необходимым и достаточным условием сходимости ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ является справедливость равенства (3) при всяком k .*

Доказательство. Для того чтобы ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходилсся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \quad (4)$$

имела конечный предел A , где s_n обозначает $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, т. е. сумму n первых членов ряда.

Но из предыдущего параграфа мы знаем, что необходимым и достаточным условием существования конечного предела A у последовательности (4) является соблюдение неравенства $|s_q - s_p| < \epsilon$, где p и q превосходят грань N , зависящую только от ϵ ; число же ϵ есть положительное и произвольно малое, но *фиксированное*. Полагая $p = n - 1$ и $q = n + k$, мы видим, что $s_p = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ и $s_q = u_1 + u_2 + \dots + u_{n+k}$. Отсюда предыдущее неравенство напишется в виде:

$$|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+k}| < \epsilon, \quad (5)$$

причем $n > N$, а число k *любое*.

А это и говорит нам, что для существования конечного предела у последовательности (4) и, значит, для сходимости ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ необходимо и достаточно, чтобы было удовлетворено равенство (3) при *любом k* . ч. т. д.

Заметим, что в то время, как *необходимый* признак сходимости

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

очень легок в применении, *полный* признак (3) настолько громоздок, что применять его прямо почти невозможно.

Поэтому, на практике, испробовав необходимый признак $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, обращаются к группе *достаточных* признаков.

§ 68. Достаточные признаки сходимости. Сравнение рядов. До сих пор мы рассматривали самые общие ряды. Остановим теперь наше внимание на одном частном случае, а именно, на рядах с *положительными членами*. Этот частный случай тем более важен, что, как мы увидим в дальнейшем, к нему приводится огромное большинство других случаев.

Итак, пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

— ряд с положительными членами; ясно, что при всяком n имеем:

$$S_{n+1} > S_n;$$

поэтому возможны два случая: либо S_n неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n , и тогда ряд расходится; либо сумма n первых членов остается при всяком n меньше некоторого постоянного числа B ; в этом случае ряд сходится, и его сумма A меньше или равна B (см. § 65).

Это замечание приводит нас немедленно к следующему способу узнать, сходится или расходится ряд с положительными членами. Пусть

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

— ряд с положительными членами, относительно которого мы знаем, сходится он или расходится; сравним с ним данный ряд с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

Допустим, что ряд сравнения (v) сходится, и пусть для всех значений n имеем $u_n \leq v_n$, тогда ряд (u) тоже сходится, потому что сумма его первых n членов не больше суммы n первых членов ряда (v) и, следовательно, его суммы B ; значит, сумма ряда (u) не превосходит B .

Допустим, что ряд сравнения (v) расходится и что для всех значений n имеем $u_n \geq v_n$; сумма n первых членов ряда (v) может превзойти любое положительное число, и подавно это будет иметь место для ряда (u); значит, он расходится.

Пример 1. Исследовать ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$

Решение. Каждый член данного ряда, кроме первого и второго, меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$$

а этот ряд сходится (§ 66), следовательно, и данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Решение. Этот ряд расходится, так как его члены больше соответствующих членов гармонического ряда, который, как мы видели в § 67, есть ряд расходящийся.

§ 69. Признак сходимости Д'Аламбера. Принимая за ряд сравнения (v) геометрическую прогрессию с положительным знаменателем, мы приходим к одному чрезвычайно удобному для практики признаку сходимости, открытому Д'Алаббером.

Рассмотрим отношение $n+1$ -го члена ряда к n -му, т. е. отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

где все члены данного ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ *положительны*.

Допустим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho.$$

Нам придется различать три случая.

1. Если $\rho < 1$, то ряд сходится. В самом деле, как только n станет достаточно большим, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет заключено в промежутке $(\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon)$, где ε — очень малое число. Поэтому, полагая $r = \rho + \varepsilon$, имеем для всех n , начиная с некоторого m , неравенство:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r,$$

поэтому

$$u_{m+1} < r u_m; \quad u_{m+2} < r u_{m+1} < r^2 u_m; \quad u_{m+3} < r^3 u_m; \dots$$

Следовательно, каждый член нашего ряда, начиная с $m+1$ -го, меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$u_m r + u_m r^2 + u_m r^3 + \dots,$$

которая сходится, так как $r < 1$ (r как угодно мало отличается от ρ , а $\rho < 1$, значит, r можно выбрать < 1). Поэтому и данный ряд тоже сходится¹.

2. Если $\rho > 1$, ряд расходится. В самом деле, как только n станет достаточно большим, будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon,$$

¹ При исследовании вопроса о сходимости ряда мы имеем право не обращать внимания на любое конечное число первых членов. В самом деле, сравним между собой два ряда:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$$

и

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$$

Докажем, что эти ряды или одновременно сходятся, или одновременно расходятся. Действительно, если S_n есть сумма n первых членов первого ряда, а s_n — сумма n первых членов второго ряда, то

$$S_n = s_{n-m} + S_m.$$

Так как при неограниченном возрастании n величина m не меняется, то либо $\lim S_n$ существует, тогда существует и $\lim s_n$ (и обратно), либо оба эти предела одновременно не существуют.

как бы мало ни было ϵ , значит $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, т. е. $u_{n+1} > u_n$, следовательно, члены ряда идут возрастаая, т. е. не могут стремиться к нулю при неограниченном возрастании n , значит, ряд расходится (рис. 62).

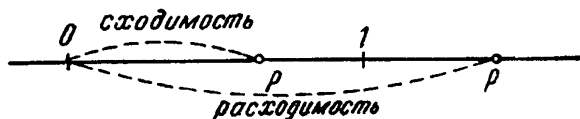


Рис. 62

3. Если $\rho = 1$, ряд может и сходиться и расходиться. Это легко видеть на следующих примерах.

Рассмотрим для различных значений p ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \dots$$

Отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p},$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = \frac{1}{1^p} = 1 (= \rho).$$

Следовательно, при всяком p будет $\rho = 1$. Но мы сейчас увидим, что при $p \leq 1$ ряд расходится, а при $p > 1$ он сходится. В самом деле, если $p = 1$, данный ряд обращается в гармонический, расходимость которого уже была доказана. Если $p < 1$, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда, значит, он расходится.

Наконец, если $p > 1$, имеем:

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3$$

и т. д. Ряд

$$2 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \dots$$

при $p > 1$ представляет геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим единицы, и, следовательно, сходится. Но сумма первых

членов данного ряда меньше соответствующей суммы для этой прогрессии, как показывают предыдущие неравенства, поэтому данный ряд сходится.

Мы убедились, что в случае, когда $p = 1$, признак Д'Аламбера не решает вопроса о сходимости ряда; здесь нужны более тонкие исследования, выходящие из рамок этого курса.

Пример 1. Исследовать вопрос о сходимости ряда

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

Решение. n -й член есть

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)};$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} : \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

поэтому, в силу случая 1, ряд сходится. Сумма его равна неперову числу e .

Пример 2. Исследовать ряд

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots$$

Решение.

$$u_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{10^n},$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \dots n(n+1)}{10^{n+1}} : \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{10^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty,$$

и, в силу случая 2, расходится¹.

Пример 3. Исследовать ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

Решение.

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)2n},$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} = 1.$$

Признак Д'Аламбера ничего не дает. Но сходимость ряда можно доказать, заметив, что его члены меньше соответствующих членов ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

а этот ряд сходится (см. пример в случае 3, полагая $p = 2$).

¹ Можно было бы убедиться в расхождении этого ряда, доказав, что u_n не стремится к нулю с возрастанием n . Это имеет место тогда, когда признак Д'Аламбера указывает на расхождение.

§ 70. Ряды с чередующимися знаками. Так называют ряды, в которых члены попеременно положительны и отрицательны; таков будет ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (u)$$

если предполагать, что все числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ положительны.

Признак Лейбница:

если

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

то ряд (u) сходится, и его сумма $A \leq u_1$.

Доказательство. Рассмотрим сумму S_{2n} первых $2n$ членов ряда; ее можно написать в двух видах:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

и

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Каждая разность в скобках положительна (или равна нулю).

Поэтому из первой строки мы видим, что S_{2n} есть величина положительная (или равная нулю) и возрастает (не убывает) вместе с n ; из второй строки видно, что $S_{2n} \leq u_1$. Положительные величины S_{2n} возрастают с n , оставаясь все время меньше числа u_1 ; значит, они стремятся к определенному пределу A , меньшему или равному u_1 . Равенство

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1},$$

в котором u_{2n+1} стремится к нулю при неограниченном возрастании n , показывает, что и S_{2n+1} стремится к тому же пределу A ; значит, данный ряд сходится и имеет A своей суммой (рис. 63).



Рис. 63

Замечание. Если мы примем сумму A равной сумме n первых членов ряда $u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n$, то мы сделаем ошибку, абсолютная величина которой будет меньше u_{n+1} , так как отброшенный нами ряд есть тоже знакочередующийся, и его первый член есть $(-1)^n u_{n+1}$, а потому его сумма по абсолютной величине меньше или равна u_{n+1} .

Пример. Исследовать ряд с чередующимися знаками

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Решение. Так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то ряд сходится. Если принять его сумму равной

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

мы сделаем ошибку меньше, чем $\frac{1}{n+1}$.

§ 71. Абсолютная сходимость. Возьмем какой-нибудь ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

члены которого суть действительные числа, могущие быть и положительными, и отрицательными. Одновременно с рядом (1) рассмотрим ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

составленный из *абсолютных величин* членов данного ряда (1).

Теорема. Если ряд (2) абсолютных величин сходится, тогда данный ряд (1) также должен быть сходящимся.

Доказательство. Ряд (2) абсолютных величин есть ряд знакоположительный и, по условию, сходящийся. Обозначим его сумму через B .

Сделаем, *во-первых*, следующее: заменим в данном ряде (1) все отрицательные члены нулями, оставив все положительные члены на их прежних местах. Мы получим некоторый новый ряд $u_1^* + u_2^* + u_3^* + \dots + u_n^* + \dots$, уже не имеющий отрицательных членов и *заведомо сходящийся*, ибо его члены не могут превосходить соответственные члены сходящегося ряда (2).

Сделаем, *во-вторых*, следующее: заменим в данном ряде (1) все положительные члены нулями, оставив все отрицательные члены на их прежних местах. Мы получим некоторый новый ряд $u_1^{**} + u_2^{**} + u_3^{**} + \dots + u_n^{**} + \dots$, состоящий только из отрицательных членов и из нулей. Этот ряд *заведомо сходится*, ибо, переименовав у *всех* его членов знаки на обратные, мы получаем ряд, не имеющий совсем отрицательных членов, причем его члены не могут превосходить соответственные члены сходящегося ряда (2).

Теперь данный ряд (1) есть, очевидно, сумма обоих полученных сходящихся рядов, ибо имеем для любого целого n тождество

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = (u_1^* + u_2^* + \dots + u_n^*) + (u_1^{**} + u_2^{**} + \dots + u_n^{**}).$$

И так как обе переменные величины, написанные в скобках, по доказанному имеют конечные пределы, когда $n \rightarrow \infty$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$. А это означает, что данный ряд (1) сходится.

Эта теорема позволяет для широкого класса рядов свести вопрос об их сходимости к вопросу о сходимости ряда с положительными членами. В самом деле, заменив все члены ряда их абсолютными величинами, мы получим ряд с положительными членами; допустим, что, применив к нему один из признаков сходимости для рядов с положительными членами, мы доказали его сходимость; тогда и данный ряд сходится.

Определение. *Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин всех его членов.*

Доказанная теорема говорит о том, что *всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся*. Но не следует думать, что верно и обратное, ибо далеко не всякий сходящийся ряд является рядом абсолютно сходящимся.

Например, знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

есть ряд *сходящийся*, согласно предыдущему параграфу, но ряд абсолютных величин

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

есть ряд гармонический и, следовательно, *расходящийся*.

Такие ряды, которые сами сходятся, но имеют ряд абсолютных величин их членов *расходящимся*, называются *не абсолютно сходящимися рядами*.

Эти ряды просто сходятся, без того, чтобы быть абсолютно сходящимися. Их называют иногда даже «условно сходящимися» рядами, называя абсолютно сходящиеся ряды «безусловно сходящимися».

Рядами не абсолютно сходящимися пользоваться можно, ибо они все же сходятся, но делать это следует с большей осторожностью, так как они обладают свойствами, совершенно непривычными для

обыкновенной суммы и кажущимися странными на первый взгляд. Так,

в ряде не абсолютно сходящемся нельзя переставлять члены, так как от этого может измениться сумма всего ряда.

Возьмем, например, знакочередующийся сходящийся ряд

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

и переставим у него члены так, чтобы за всяким положительным его членом следовали два не написанные ранее ближайшие отрицательные члена:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Ясно, что при такой перестановке членов ни один член первоначального ряда не будет ни утрачен, ни написан по нескольку раз, но только по одному разу.

Легко видеть, что *сумма нового ряда будет равна лишь половине прежней*, т. е. $\frac{A}{2}$.

Для этого достаточно каждый его положительный член сложить с непосредственно следующим за ним отрицательным.

Это нам дает:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

или, после выноса общего множителя $\frac{1}{2}$, имеем:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{A}{2}.$$

Этот факт, кажущийся сначала очень странным, удивляет меньше, если мы обратим внимание на то, что в каждом не абсолютно сходящемся ряде сумма положительных членов всегда равна $+\infty$, а сумма отрицательных членов всегда равна $-\infty$. Таким образом, переставляя надлежащим образом его члены, легко добиться, чтобы суммой переставленного ряда явилось какое угодно заранее заданное число. Нужно помнить, что отыскание суммы A не абсолютно сходящегося ряда $u_1 + u_2 + \dots + u^n + \dots$ есть отыскание предела $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, где $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, т. е. это отыскание есть всегда *раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$* .

Ничего подобного нет в абсолютно сходящихся рядах: их члены можно переставлять как угодно, не боясь, что от этого ряд изменит свою сумму или перестанет быть сходящимся. В этом отношении абсолютно сходящиеся ряды сильно напоминают *конечные суммы, слагаемые которых можно брать в каком угодно порядке*.

Для доказательства возьмем сначала какой-нибудь сходящийся ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ с *положительными* членами и обозначим его

сумму через A . Переставим как-нибудь его члены и обозначим через $u_1^* + u_2^* + \dots + u_n^* + \dots$ полученный новый ряд. Во-первых, он будет сходящимся, ибо сумма S_n^* его первых n членов, $S_n^* = u_1^* + u_2^* + \dots + u_n^*$, всегда меньше, чем A . В самом деле, члены $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$, при фиксированном n , должны встретиться в сумме $S_m = u_1 + u_2 + \dots + u_m$, когда m достаточно велико; значит, мы должны иметь $S_n^* < S_m < A$ (рис. 64). Таким образом, S_n^* с возрастанием знака n увеличивается, но остается всегда меньше, чем A . Отсюда следует, что $\lim S_n^*$ существует; обозначим его через A^* . Во-вторых, из сказанного видно, что сумма A^* переставленного



Рис. 64

ряда никогда не больше суммы A первоначального ряда, т. е. $A^* \leq A$. Но так как первоначальный ряд можно в свою очередь рассматривать как переставленный ряд $u_1^* + u_2^* + \dots + u_n^* + \dots$, то имеем обратное неравенство: $A \leq A^*$. Отсюда и следует, что имеем точное равенство: $A = A^*$ и, значит, *знакоположительный сходящийся ряд не изменяет своей суммы от перестановки его членов.*

Если теперь данный ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ имеет и положительные, и отрицательные члены, но при этом сходится абсолютно, то его надо рассматривать как разность двух частных знакоположительных *сходящихся* рядов. А так как, по доказанному, можно переставлять их члены как угодно, не утрачивая ни их сходимости, ни их прежней суммы, то отсюда следует, что у *всякого абсолютно сходящегося ряда можно изменять порядок его членов, причем этот ряд не утрачивает ни своей сходимости, ни величины своей суммы.* Ч. т. д.

§ 72. Интегральный признак Коши. Для рядов с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

имеется еще один признак распознавания сходимости и расходимости, но требующий для этого, чтобы *члены ряда монотонно убывали до нуля*, т. е. чтобы имели:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0. \quad (2)$$

Мы уже знаем, что общий член u_n ряда есть *функция значка n* , т. е.

$$u_n = \varphi(n), \quad (3)$$

где, строго говоря, буква n пробегает только по целым положительным числам 1, 2, 3, 4, ... Но в большинстве случаев функция $\varphi(n)$ дается как функция *непрерывно изменяющегося аргумента n* , и когда члены u_n ряда монотонно убывают до нуля, тогда производящая их функция

$$u = \varphi(n) \quad (4)$$

есть непрерывная монотонно убывающая до нуля функция при непрерывном возрастании независимого переменного n до бесконечности, т. е.

$$\varphi(n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Геометрически это означает, что уравнение $u = \varphi(n)$ изображается непрерывной линией, текущей, начиная с некоторого k , над осью ON и монотонно спускающейся к этой оси, как своей асимптоте (рис. 65).

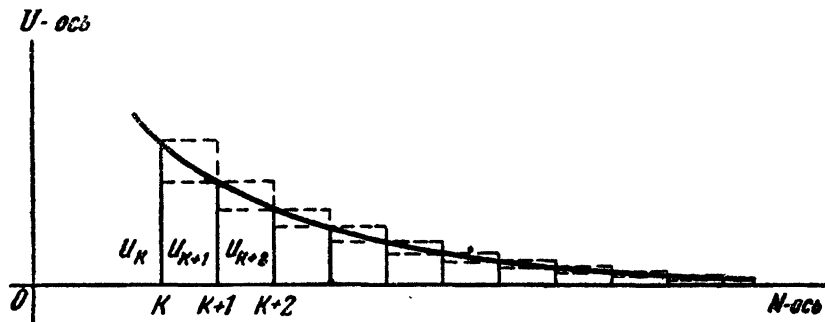


Рис. 65

Ясно, что площадь фигуры, ограниченной осью ON , кривой $u = \varphi(n)$ и ординатой, восстановленной в точке $n = k$, равна определенному интегралу

$$\int_k^{+\infty} \varphi(n) dn.$$

Ясно, что эта площадь меньше суммы площадей выступающих наружу прямоугольников, имеющих нижними основаниями 1, а высотами $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots$ и больше суммы площадей внутренних прямоугольников, имеющих точно так же нижними основаниями 1, а высотами $u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}, \dots$

Это означает, что мы имеем неравенство:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots < \int_k^{+\infty} \varphi(n) dn < u_k + u_{k+1} + \dots \quad (5)$$

Из этого неравенства следует, что рассматриваемый ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда определенный интеграл $\int_k^{+\infty} \varphi(n) dn$ имеет конечную величину.

Этот признак носит название интегрального признака Коши, и его применение подчинено следующему правилу.

Первый шаг. *Имея убывающий знакоположительный ряд $u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$, найти монотонно убывающую непрерывную функцию $\varphi(n)$, производящую члены ряда, т. е. такую, что $u_n = \varphi(n)$.*

Второй шаг. *Вычислить определенный интеграл $\int_k^{+\infty} \varphi(n) dn$.*

Если он равен $+\infty$, ряд расходится; если он имеет конечную величину, ряд сходится.

Интегральный признак Коши дает возможность моментально распознать сходимость и расходимость громадного числа очень важных знакоположительных рядов, и в этом отношении имеет чрезвычайную ценность.

Пример 1. Установить расходимость гармонического ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Решение. Имеем $\int_k^N \frac{dn}{n} = [\ln n]_k^N = \ln N - \ln k = \ln \frac{N}{k}$. Когда $N \rightarrow +\infty$,

тогда $\ln \frac{N}{k} \rightarrow +\infty$. Значит, $\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n} = +\infty$. Ряд *расходится*.

Пример 2. Исследовать ряд $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$

Решение. Имеем $\int \frac{dn}{n^p} = \int n^{-p} dn = \frac{n^{-p+1}}{-p+1} + C$.

Значит,

$$\int_k^N \frac{dn}{n^p} = \frac{1}{1-p} [n^{1-p}]_k^N = \frac{1}{1-p} [N^{1-p} - k^{1-p}],$$

где предполагается, что показатель степени p есть положительное число,

отличное от 1. Если $p < 1$, ясно, что $\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n^p} = +\infty$. Ряд *расходится*. Если $p > 1$, ясно, что

$$\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n^p} = -\frac{1}{1-p} \cdot k^{1-p} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{k^{p-1}} < +\infty.$$

Ряд *сходится*.

Пример 3. Исследовать ряд $\frac{1}{1 \cdot \ln^p 1} + \frac{2}{2 \ln^p 2} + \dots + \frac{1}{n \ln^p n} + \dots$

Решение. Вычисляем $\int \frac{dn}{n \ln^p n} = \int \frac{d \ln n}{\ln^p n} = \frac{\ln^{1-p} n}{1-p} + C$. Значит,

$$\int_k^N \frac{dn}{n \ln^p n} = \frac{1}{1-p} [\ln^{1-p} N - \ln^{1-p} k].$$

Если $p > 1$, ясно, что $\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n \ln^p n} = \frac{1}{p-1} \ln^{1-p} k < +\infty$, т. е. ряд *сходится*. Если $p < 1$, ясно, что $\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n \ln^p n} = +\infty$, т. е. ряд *расходится*. Если $p = 1$, тогда $\int_k^N \frac{dn}{n \ln n} = \int_k^N \frac{d \ln n}{\ln n} = [\ln \ln n]_k^N$. Значит, при $N \rightarrow +\infty$, имеем $\int_k^N \frac{dn}{n \ln n} \rightarrow +\infty$.

Итак, $\int_k^{+\infty} \frac{dn}{n \ln n} = +\infty$, т. е. ряд *расходится*.

§ 73. Действия над рядами. Какой-нибудь сходящийся ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ часто обозначают более коротким способом, а именно $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, т. е. выписывают его общий член u_n под знаком *полной* суммы $\sum_{n=1}^{\infty}$, где указано, что значок n пробегает *все* числа 1, 2, 3, 4, ...

Сложение и вычитание рядов. Если ряды $A = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, тогда будет сходящимся и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, полученный сложением или вычитанием их соответственных членов, причем его сумма равна $A \pm B$.

Доказательство. По предположению, мы имеем:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \quad \text{и} \quad B = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_1 + v_2 + \dots + v_n).$$

Отсюда, складывая или вычитая, имеем:

$$A \pm B = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n)].$$

А это выражает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ есть сходящийся и что его сумма равна $A \pm B$.

Умножение рядов. Если ряды $A = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ суть абсолютно сходящиеся, тогда полный ряд $\sum_{p,q=1}^{\infty} u_p v_q$, со-

ставленный из всех парных произведений членов первого ряда на члены второго ряда, расположенных в любом порядке, есть также абсолютно сходящийся, причем его сумма равна AB .

Доказательство. Обозначим через $\sum_N u_p v_q$ сумму первых N членов полного ряда $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$, и через k наивысшую величину значков p и q , имеющихсся в сумме $\sum_N u_p v_q$. Ясно, что имеем:

$$\sum_N |u_p v_q| < \sum_{p=1}^k |u_p| \cdot \sum_{q=1}^k |v_q|.$$

И тем более, будем иметь неравенство:

$$\sum_N |u_p v_q| < \sum_{p=1}^{\infty} |u_p| \cdot \sum_{q=1}^{\infty} |v_q|.$$

Это неравенство показывает, что полный ряд $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$ есть абсолютно сходящийся.

Легко доказать, что сумма полного ряда $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$ равна произведению AB . Действительно, так как полный ряд есть, по доказанному, абсолютно сходящийся, его члены можно располагать в любом порядке. Обозначим через A_n сумму первых n членов первого ряда, $A_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, и через B_n сумму первых n членов второго ряда, $B_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Располагаем теперь члены полного ряда $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$ в следующем порядке: сначала единственный член произведения $A_1 B_1$, потом к нему присоединяются 3 недостающие члена произведения $A_2 B_2$, потом к ним присоединяем недостающих 5 членов произведения $A_3 B_3$ и т. д. Вообще, имея написанными все члены произведения $A_n B_n$, мы затем к ним присоединяем все члены произведения $A_{n+1} B_{n+1}$ и т. д. Когда мы таким образом напишем полный ряд $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$, тогда делается ясным, что его сумма есть предел произведения $A_n B_n$, т. е. равна AB . ч. т. д.

Из доказанного следует еще раз, что с абсолютно сходящимися рядами $u_1 + u_2 + \dots + u_p + \dots$ и $v_1 + v_2 + \dots + v_q + \dots$ позволено обращаться как с обыкновенными конечными суммами, а именно: перемножать их члены и располагать получающиеся парные произведения в любом порядке, лишь бы при этом ни одно

парное произведение $u_p v_q$ не было, по невнимательности, пропущено или повторено дважды.

Чтобы избежать таких ошибок, обычно располагают члены полного ряда $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$ в следующем порядке: называют *весом* парного произведения $u_p v_q$ сумму $p+q$ значков p и q . Тогда *все* члены полного ряда, имеющие вес $n+1$, выпишутся в виде:

$$u_1 v_n, u_2 v_{n-1}, u_3 v_{n-2}, \dots, u_n v_1.$$

Поэтому, если обозначить их сумму через w_{n+1}

$$w_{n+1} = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \dots + u_n v_1, \quad (6)$$

то полный ряд $\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q$ пишется очень просто:

$$\sum_{p, q=1}^{\infty} u_p v_q = w_2 + w_3 + w_4 + \dots + w_n + \dots$$

Таким образом, мы приходим к предложению:

если оба ряда $A = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ и $B = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ суть абсолютно сходящиеся, тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1)$$

есть также абсолютно сходящийся и имеет суммой произведение AB .

П р и м е ч а н и е. Для просто сходящихся рядов теорема эта уже не верна, ибо когда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ суть сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся,

тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1)$ может *расходиться*. Например, про-

изведение двух сходящихся знакопеременных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

дает расходящийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} w_n$, ибо w_n , определенное равенством (6), не может стремиться к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$.

§ 74. Остаток ряда. Возьмем какой-нибудь *сходящийся* ряд

$$A = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

Если мы отбросим у него первые n членов, то получим новый *сходящийся* ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$, сумма которого обозначается буквой R_n и называется *остатком* данного *сходящегося* ряда (1):

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots \quad (2)$$

Так как сумма первых n членов ряда (1) обозначается буквой S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad (3)$$

то при всяком n мы имеем равенство

$$A = S_n + R_n. \quad (4)$$

А так как мы знаем, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = A$, то из равенства (4) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

Словесно это прочитывается так:

остаток R_n всякого сходящегося ряда стремится к нулю, когда его номер n стремится к бесконечности.

Чем меньше остаток R_n , тем точнее получают сумму A ряда, если его берут не весь, но останавливают на n -м члене u_n , и, значит, тем выше будет полученное приближение.

Расходящиеся же ряды не имеют ни суммы, ни остатка.

§ 75. Общий обзор. Все сказанное о численных рядах можно резюмировать следующим образом.

I. Когда задан какой-нибудь численный ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, нужно прежде всего посмотреть, *стремится ли его общий член u_n к нулю*, когда значок n безгранично увеличивается: если мы не имеем равенства $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, ряд *расходится* и его надо оставить.

II. Если же имеем $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, тогда надо посмотреть, не есть ли это *знакопеременный* ряд и не убывают ли по абсолютной величине его члены: если эти условия для данного ряда соблюдены, тогда ряд *сходится*, и его сумма A заключена *между* S_n и S_{n+1} для всякого n .

III. Если данный ряд не оказывается знакопеременным и монотонно убывающим, тогда нужно посмотреть, не будет ли он

абсолютно сходящимся, и для этого надо отыскать предел

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$. Если $\rho < 1$, ряд абсолютно сходится, если $\rho > 1$, ряд расходится; если $\rho = 1$, ряд еще не раскрыл своей природы, ибо он может оказаться и сходящимся и расходящимся.

IV. В случае, когда $\rho = 1$ и когда $|u_n|$ монотонно убывает до нуля, надо попробовать применить интегральный признак Коши. Для этого берут производящую монотонную функцию $\varphi(n)$, такую,

что $|u_n| = \varphi(n)$, и вычисляют определенный интеграл $\int_k^{+\infty} \varphi(n) dn$.

Если он равен конечной величине, данный ряд есть абсолютно сходящийся. Если интеграл равен $+\infty$, а данный ряд есть знакопостоянный, тогда он расходится. Если же он содержит и положительные, и отрицательные члены, он еще может быть сходящимся, но уже не абсолютно.

ЗАДАЧИ

Применив признак Д'Аламбера, показать, что нижеследующие ряды сходятся:

$$1. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \quad 4. 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$2. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots \quad 5. \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots$$

$$3. \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \dots \quad 6. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 7} + \dots$$

Путем сравнения рядов показать сходимость нижеследующих рядов. Показать также, что признак Д'Аламбера для первых двух рядов неприменим.

$$7. 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

Указание. Сравнить с рядом

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \dots$$

$$8. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Указание.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2}.$$

$$9. \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$$

Указание.

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Показать, что нижеследующие ряды расходятся.

10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$

У к а з а н и е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right).$$

11. $\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \dots$

У к а з а н и е. Применить признак Д'Аламбера.

12. $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \dots$

У к а з а н и е.

$$u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{1+2n+n^2} = \frac{1}{1+n}.$$

13. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$

14. $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots$

У к а з а н и е.

$$u_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}.$$

Выяснить, какие из нижеследующих рядов сходятся абсолютно и какие не абсолютно:

15. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$

Сходится абсолютно, так как $|u_n| = \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{n^2}$.

16. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots$

17. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots$

18. $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots$

19. $\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} + \dots$

Сходится абсолютно, так как $|u_n| = \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

20. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

21. $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots$

У к а з а н и е. См. задачу 9.

Функциональные ряды

§ 76. Ряды функций. До сих пор мы изучали *численные* ряды $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, т. е. имевшие своими членами *числа*. Теперь мы приступаем к изучению рядов

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

члены которых являются *функциями независимого переменного x* . Когда x получает определенное численное значение, тогда функциональный ряд (1) становится численным рядом и тогда к нему становится применимым все, что было сказано выше о численных рядах.

Если при каком-нибудь численном значении x_0 функциональный ряд (1) расходится, тогда такое численное значение x_0 нужно отбросить, ибо расходящиеся ряды вообще не служат ни к чему. Таким образом, имея функциональный ряд (1), надо сохранить только те численные значения x , при которых ряд (1) сходится. Совокупность *всех* таких численных значений x , при которых ряд (1) сходится, называется *областью сходимости ряда*.

Если x находится в области сходимости ряда, ряд сходится и имеет вполне определенную сумму, которая очевидно будет зависеть от x и, значит, является функцией независимого переменного x . Обозначив эту сумму через $f(x)$, мы имеем равенство

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2)$$

справедливое лишь в области сходимости функционального ряда (1). Вне этой области равенство (2) не существует, ибо функциональный ряд там расходится, если бы даже там функция $f(x)$ и существовала. В области же сходимости равенство (2) законно и называется *разложением функции $f(x)$ в ряд функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$, ...*

Пример. Геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ сходится в промежутке $(-1, +1)$ и расходится всюду вне его. Областью сходимости здесь поэтому является промежуток $(-1, +1)$ и в ней сумма ряда равна функции $\frac{1}{1-x}$, так что в промежутке $(-1, +1)$ можно писать:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Вне промежутка $(-1, +1)$ функция $\frac{1}{1-x}$ продолжает существовать, но ряд перестает существовать, ибо делается расходящимся. Ряд расходится даже в обеих граничных точках $x = +1$ и $x = -1$ промежутка $(-1, +1)$. Поэтому не отрезок $[-1, +1]$ является областью сходимости, но только

промежутков $(-1, +1)$. В этом промежутке функция $\frac{1}{1-x}$ разложена в ряд степеней $1, x, x^2, x^3, \dots$

§ 77. Равномерная сходимость. Рассмотрим какой-нибудь функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \quad (1)$$

который мы предположим *сходящимся* в каждой точке x некоторого отрезка $[a, b]$. Ряд (1) может оказаться сходящимся где-нибудь еще и вне этого отрезка, но такие точки мы сейчас не берем во внимание.

Из того, что ряд (1) сходится в каждой точке x отрезка $[a, b]$, следует, что он имеет в точке x определенную сумму $f(x)$:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2)$$

Если мы через $S_n(x)$ обозначим сумму n первых членов нашего ряда и через $R_n(x)$ его остаток, то имеем:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \dots,$$

причем всегда

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x). \quad (3)$$

Так как ряд (1) предположен сходящимся в каждой точке x отрезка $[a, b]$, то остаток $R_n(x)$ обязан стремиться к нулю, когда n безгранично возрастает, т. е. имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \quad (4)$$

Это обозначает, что последовательность абсолютных величин остатков

$$|R_1(x)|, |R_2(x)|, |R_3(x)|, \dots, |R_n(x)|, \dots \quad (5)$$

ведет себя так, что для всякого наперед заданного положительного ϵ имеется такая грань N (зависящая от ϵ), начиная с которой все члены последовательности (5) меньше, чем ϵ , т. е. имеем:

$$|R_n(x)| < \epsilon, \quad (6)$$

лишь только значок n остатка делается $\geq N$.

Здесь мы должны быть очень осторожны и должны принять во внимание, что хотя неравенство (6) и имеет место в каждой точке x отрезка $[a, b]$, однако при этом точка x предполагается фиксированной, т. е. уже выбранной для исследования, и что

для нее и только для нее речь идет об ее грани N . Если же мы будем менять точки x , беря из отрезка $[a, b]$ то одни, то другие, тогда будет, вообще, изменяться и их грань N , ибо она зависит от точки x . Для одних точек x отрезка $[a, b]$ неравенство (6) наступает раньше, а для других точек x оно может наступать много позже, так что здесь, вообще, никакого однообразия (равномерности) может и не оказаться. Поэтому грань N для точки x следует обозначать через N_x , ибо она зависит от x .

Так происходит в общем случае сходящихся функциональных рядов (1). Но в некоторых частных случаях наблюдается независимость грани N_x от местонахождения точки x на отрезке $[a, b]$. В этих случаях можно указанную грань обозначать просто одной буквой N , не проставляя внизу ее указателя x , ибо он делается в этих случаях ненужным потому, что остаток $R_n(x)$ с одинаковой скоростью для всех точек x отрезка устремляется к нулю. Такие функциональные ряды (1) называются *равномерно* (т. е. однообразно) *сходящимися*.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

сходящийся всюду на отрезке $[a, b]$, называется равномерно сходящимся на нем, если неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$ будет соблюдено сразу для всех точек x отрезка, лишь только значок n остатка превысит грань N , $n \geq N$, зависящую от ϵ .

Пример равномерно сходящегося ряда. Геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ равномерно сходится на отрезке $[-a, +a]$, где a — положительное число, меньшее единицы.

Доказательство. Прогрессия $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ сходится на промежутке $(-1, +1)$ и имеет суммой $\frac{1}{1-x}$; вне этого промежутка она расходится. Имеем: $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ и $R_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^n(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^n}{1-x}$. Так как $\frac{x^n}{1-x}$ возрастает по мере увеличения x и приближения его к 1, то имеем для всех точек x отрезка $[-a, +a]$, где $0 < a < 1$, неравенство:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \leq \frac{a^n}{1-a}.$$

Но так как $a^n \rightarrow 0$, когда n безгранично возрастает, ибо $a < 1$, то для всякого ϵ имеется такая грань N , за которой $\frac{a^n}{1-a} < \epsilon$. Поэтому мы будем иметь

$$|R_n(x)| < \epsilon$$

сразу для всех точек отрезка $[-a, +a]$, лишь только n превысит грань N . А это и есть равномерная сходимость.

Пример ряда неравномерно сходящегося. Берем функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где функция $y = u_n(x)$ изображена на рисунке 66. Здесь видно, что эта функция изображается боковыми сторонами равнобедренного треугольника, имеющего основанием

отрезок $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, а высотой 1. Вне же от-

резка $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ мы имеем $u_n(x) = 0$. Ясно,

что $u_n(x)$ есть неотрицательная функция, непрерывная везде. Ясно далее, что ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ сходится всюду на основном отрезке $[0, 1]$, ибо в начале $x = 0$ все члены ряда равны нулю, а вне начала, т. е. для x положительного и фиксированного, имеется такое N , что x окажется вне отрезка $\left[0, \frac{1}{n}\right]$

для $n > N$ и, значит, будем иметь тогда $0 = u_n(x) = u_{n+1}(x) = u_{n+2}(x) = \dots$. Поэтому ряд абсолютно сходится в любой точке x основного отрезка $[0, 1]$. Но его

сходимость не есть равномерная, ибо всякий остаток $u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+2}(x) + \dots$ имеет точки, где он больше 1, например точку $x = \frac{1}{2n}$, где $u_n(x) = 1$, а остальные члены остатка неотрицательны.

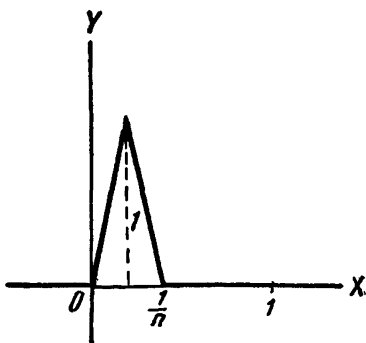


Рис. 66

§ 78. Признак для равномерной сходимости. Ввиду большой важности равномерной сходимости, необходимо дать признак для распознавания равномерной сходимости заданного функционального ряда.

Теорема. Если все члены функционального ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ на отрезке $[a, b]$ по абсолютной величине меньше соответственных членов некоторого сходящегося знакоположительного численного ряда $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, то функциональный ряд на этом отрезке равномерно сходится.

Доказательство. Пусть численный ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится, и пусть на отрезке $[a, b]$ имеем неравенства

$$|u_n(x)| \leq a_n. \quad (1)$$

справедливые для всякого n и во всех точках x этого отрезка. Из неравенства (1) прежде всего следует, что функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (2)$$

есть абсолютно сходящийся во всякой точке x отрезка $[a, b]$.

Далее, обозначая через r_n остаток $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ нашего сходящегося знакоположительного ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (3)$$

мы видим, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. Отсюда для заданного ε имеется грань N , такая, что $r_n < \varepsilon$ для $n > N$.

И так как очевидно, что

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| \leq \\ &\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots < a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon, \end{aligned}$$

если $n > N$, то имеем:

$|R_n(x)| < \varepsilon$ на всем отрезке $[a, b]$ для каждого $n > N$. А это и есть *равномерная сходимость функционального ряда* (2) на отрезке $[a, b]$. ч. т. д.

Для удобства формулировки этого признака равномерной сходимости обычно пользуются такой терминологией:

функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ называется правильно сходящимся на отрезке $[a, b]$, если его члены по абсолютной величине соответственно меньше членов сходящегося знакоположительного ряда $a_1 + a_2 + \dots$, называемого мажорантой данного функционального ряда.

Эта терминология позволяет теперь сказать:

всякий правильно сходящийся на отрезке $[a, b]$ функциональный ряд есть равномерно сходящийся на этом отрезке.

Найденный признак равномерной сходимости есть лишь признак достаточный, но необходимости он не представляет.

§ 79. Свойства равномерно сходящихся рядов. Свойство I. *Сумма $f(x)$ равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ непрерывных функций есть непрерывная функция.*

Доказательство. Пусть каждая функция $u_n(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ сходится на нем равномерно. Это означает, что для ε имеется такой значок n , что всюду на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. С другой стороны, при данном n сумма $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ есть, очевидно, непрерывная на $[a, b]$ функция. Это означает, что имеем неравенство $|S_n(x'') - S_n(x')| < \frac{\varepsilon}{4}$, лишь только $|x'' - x'| < \eta$. Так как $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, то имеем: $f(x'') = S_n(x'') + R_n(x'')$ и $f(x') = S_n(x') + R_n(x')$. Вычитая эти равенства, находим:

$$f(x'') - f(x') = S_n(x'') - S_n(x') + R_n(x'') - R_n(x').$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &\leq |S_n(x'') - S_n(x')| + |R_n(x'')| + |R_n(x')| < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon, \text{ если только } |x'' - x'| < \eta. \end{aligned}$$

А это и доказывает непрерывность суммы $f(x)$.

ч. т. д.

Примечание. Если ряд непрерывных функций сходится, но неравномерно, его сумма может оказаться разрывной функцией. В последнем примере § 77 указан ряд положительных непрерывных функций $u_1(x) + u_2(x) + \dots$, сходящийся всюду на отрезке $[0, 1]$, но имеющий суммой разрывную функцию $f(x)$, ибо имеем $f(0) = 0$ и $f\left(\frac{1}{2n}\right) > 1$ при всяком натуральном n .

Геометрическое изображение равномерной сходимости ряда функций. На рисунке 67 изображена пунктиром кривая $y = f(x)$. Когда ее сначала поднимают вверх на ε и потом опускают вниз на ε , тогда получают криволинейную полосу, ограниченную сверху кривой $y = f(x) + \varepsilon$, а снизу кривой $y = f(x) - \varepsilon$. Так как для ε имеется такая грань N ,

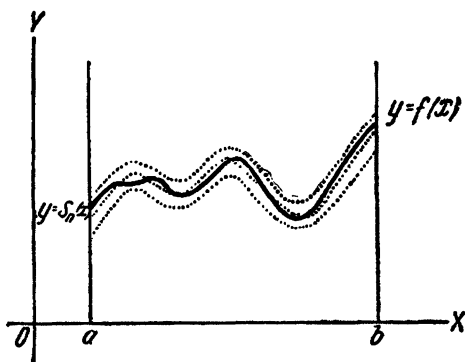


Рис. 67

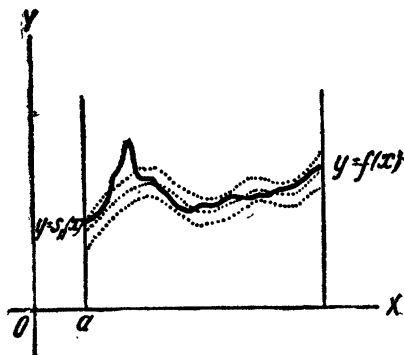


Рис. 68

зависящая от ε , начиная с которой имеем $|R_n(x)| < \varepsilon$, когда $n \geq N$, то это означает, что имеем неравенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

для всех точек отрезка $[a, b]$, когда $n \geq N$. Геометрически это означает, что допредельная кривая $y = S_n(x)$ будет *всеми* своими точками протекать внутри указанной плоскости, когда $n \geq N$. Поэтому кривую $y = S_n(x)$ следует рассматривать как *приближение* окончательной, т. е. предельной кривой $y = f(x)$, причем это *приближение* тем будет лучше и, значит, погрешность тем будет меньше, чем меньше будет ε .

Неравенство (1) очень походит на те неравенства, которыми мы определяли в главе V пределы переменных величин. Только там пределом было *число*, а здесь пределом является функция $f(x)$. Там приближающейся была переменная величина, а здесь приближающейся является изменяющаяся допредельная функция $S_n(x)$. Там переменная величина изображалась движущейся точкой, с течением времени попадающей в промежуток, окружающий предел, и навсегда впрямь в нем остающейся. Здесь изменяющаяся допредельная функция $S_n(x)$ изображается движущейся кривой $y = S_n(x)$, с течением времени попадающей в указанную полосу, окружающую неподвижную предельную кривую $y = f(x)$, и навсегда впрямь в ней остающейся.

Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ сходится, но неравномерно, и имеет суммой функцию $f(x)$, то, когда мы начертим кривую $y = f(x)$ и полосу ширины 2ε около нее, тогда приближенная кривая $y = S_n(x)$ уже не может, начиная с некоторого момента, целиком укладываться в этой полоске, когда ε достаточно мало, но должна для бесконечно многих n частично выходить

из нее, образуя выступающий из полоски гребень (рис. 68). Когда значок n безгранично увеличивается, гребень этот совсем исчезнуть не может, но лишь сдвигается вправо или влево, ибо для всякой фиксированной точки x_0 отрезка $[a, x]$ остаток $R_n(x)$ все же обязан стремиться к нулю, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x_0) = 0$.

Значит, мы обязаны иметь $|f(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$ для n достаточно большого. Но это не означает уничтожение гребня, но только уход его с абсциссы x_0 на другие абсциссы. Таким образом, неравномерная сходимость есть «феномен движущейся волны».

Свойство II. Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.

Доказательство. Если ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, составленный из непрерывных функций, равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, его сумма $f(x)$, как мы доказали выше, есть непрерывная на этом отрезке функция. Мы имеем: $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, а $R_n(x)$ есть остаток. Этот остаток есть непрерывная функция, ибо она есть разность двух непрерывных функций $f(x)$ и $S_n(x)$. Интегрируя предыдущее равенство, причем переменное интегрирования мы обозначаем буквой t , имеем:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x S_n(t) dt + \int_a^x R_n(t) dt. \quad (1)$$

В силу равномерной сходимости первоначального ряда, имеем: $|R_n(t)| < \varepsilon$ для всех точек t отрезка $[a, b]$, когда значок n пре-
взойдет некоторую грань N . Следовательно, для $n > N$, имеем:

$$\left| \int_a^x R_n(t) dt \right| \leq \int_a^x |R_n(t)| dt < \varepsilon \int_a^x dt < \varepsilon \cdot (b - a). \quad (2)$$

Так как число ε произвольно мало, когда грань N достаточно велика, то отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x R_n(t) dt = 0 \quad (3)$$

для любого x на отрезке $[a, b]$. Поэтому мы имеем:

$$\int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x S_n(t) dt. \quad (4)$$

И так как

$$\int_a^x S_n(t) dt = \int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt, \quad (5)$$

то из равенства (4) следует, что ряд

$$\int_a^x u_1(t) dt + \int_a^x u_2(t) dt + \dots + \int_a^x u_n(t) dt + \dots \quad (6)$$

есть сходящийся и имеет суммой интеграл $\int_a^x f(t) dt$.

Так как остаток ряда (6) есть $\int_a^x u_{n+1}(t) dt + \int_a^x u_{n+2}(t) dt + \dots$,

т. е. по доказанному $\int_a^x R_n(t) dt$, то, в силу неравенства (2), ряд (6) есть равномерно сходящийся на $[a, b]$.

Таким образом, мы получили предложение: *если ряд непрерывных функций*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

есть равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$, тогда имеем право его интегрировать почленно, т. е. написать:

$$\int_a^x f dx = \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \dots + \int_a^x u_n dx + \dots,$$

причем проинтегрированный почленно ряд будет заведомо равномерно сходящимся на отрезке $[a, b]$.

Полагая, в частности, $x = b$, мы имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots \quad (7)$$

Ч. т. д.

Примечание. Если функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ *неравномерно* сходится на отрезке $[a, b]$, то, хотя бы члены его $u_n(x)$ и были все непрерывными функциями на $[a, b]$ и хотя бы его сумма $f(x)$ была тоже непрерывной функцией, его, вообще, уже нельзя интегрировать почленно, ибо ряд (7) может быть и *расходящимся*, или, если он и сходится, его сумма может оказаться уже *неравной* интегралу $\int_a^b f(x) dx$.

Свойство III. *Если все члены сходящегося ряда $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$ имеют непрерывные производные $u'_1(x), u'_2(x) \dots$ на отрезке $[a, b]$ и если ряд $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$, составленный из этих производных, равномерно сходится*

на $[a, b]$, тогда данный ряд можно дифференцировать почленно, т. е. имеем право писать $f'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$

Доказательство. Это предложение сводится на предыдущее. Действительно, обозначая через $\varphi(x)$ сумму равномерно сходящегося ряда $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ непрерывных функций, $\varphi(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$, мы по доказанному имеем право интегрировать его почленно и писать:

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \int_a^x u'_1(t) dt + \int_a^x u'_2(t) dt + \dots + \int_a^x u'_n(t) dt + \dots \quad (8)$$

С другой стороны, имеем $\int_a^x u'_n(t) dt = u_n(x) - u_n(a)$. Поэтому сходящийся ряд (8) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(t) dt &= [u_1(x) - u_1(a)] + [u_2(x) - u_2(a)] + \dots + \\ &+ [u_n(x) - u_n(a)] + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

По условию, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ суть сходящиеся и их суммы соответственно равны $f(x)$ и $f(a)$. Поэтому формула (9)

перепишется в виде $\int_a^x \varphi(t) dt = f(x) - f(a)$. Отсюда ясно, что функ-

ция $\varphi(x)$ есть производная от функции $f(x)$, т. е. $f'(x) = \varphi(x)$. А так как через $\varphi(x)$ мы обозначили выше сумму равномерно сходящегося ряда $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$, то отсюда заключаем, что $f'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ ч. т. д.

Замечание. Если данный ряд функций $f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$ сходится и имеет все свои члены дифференцируемыми, но если ряд производных $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ *неравномерно* сходится, тогда данный ряд, вообще, уже нельзя дифференцировать почленно, ибо его сумма $f(x)$ может оказаться недифференцируемой, или, если она и имеет производную $f'(x)$, то таковая может оказаться уже неравной сумме $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$

§ 80. Степенные ряды. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, \dots суть постоянные, называемые *коэффициентами* степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда. Первое, что нужно узнать о степенном ряде, это определить его область сходимости.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в какой-нибудь точке x_0 , отличной от нуля, $x_0 \neq 0$, тогда он есть правильно сходящийся на всяком отрезке, лежащем внутри промежутка $(-|x_0|, +|x_0|)$.

Доказательство. Пусть степенной ряд (1) сходится в точке x_0 , отличной от начала координат O ¹. Нанесем на оси OX промежуток $(-|x_0|, +|x_0|)$, имеющий начало O своей серединой, и рассмотрим какой-нибудь отрезок $[a, b]$, лежащий в этом промежутке (рис. 69). Если x — какая-нибудь точка отрезка $[a, b]$, ясно, что абсолютная величина $|x|$ не может равняться абсолютной величине $|x_0|$, но всегда

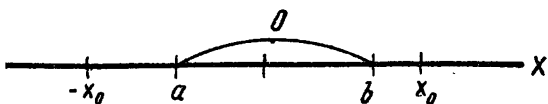


Рис. 69

будет меньше $|x_0| - \varepsilon$, где ε есть некоторое положительное число, т. е. $|x| < |x_0| - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1 - \frac{\varepsilon}{|x_0|} = \theta$, где θ есть определенное положительное число, меньшее единицы, $0 < \theta < 1$.

Мы предполагаем, что степенной ряд (1) сходится в точке x_0 . Следовательно, общий член ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ стремится к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$, а потому имеем $|a_n x_0^n| < \eta$, когда $n > N$. Здесь η есть сколь угодно малое положительное число.

Если теперь x произвольная точка отрезка $[a, b]$, мы имеем неравенство:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \eta \cdot \theta^n < \theta^n, \text{ где } n > N,$$

из которого следует, что степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ имеет на отрезке $[a, b]$ все свои члены, начиная с некоторого, по абсолютной величине меньшими, чем соответственные члены геометрической прогрессии $1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n + \dots$, где θ — положительное фиксированное число и где $n > N$. А это и обозначает, что степенной ряд правильно сходится на отрезке $[a, b]$, ибо геометрическая прогрессия $1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n + \dots$ служит его мажорантой.

ч. т. д.

Теорема Абеля дает ясное представление об области сходимости степенных рядов. Окрасим (мысленно) в красную краску всякую точку расходимости степенного ряда (1) и в голубую краску

¹ На рисунке 69 точка x_0 взята направо от начала O , т. е. x_0 взято положительным. Все рассуждения остаются теми же, если x_0 отрицательно, лишь бы $x_0 \neq 0$.

каждую его точку сходимости. Ясно, что точка $x=0$ всегда будет голубой. Если степенной ряд везде сходится, вся ось абсцисс $X'X$ будет голубой. Если степенной ряд везде расходится, вся ось абсцисс $X'X$ будет красной, кроме начала O . Если какая-нибудь точка x_0 , отличная от начала O , голубая, то, в силу теоремы Абеля, все точки оси абсцисс, лежащие ближе к началу O , чем точка x_0 , по обе его стороны, также будут голубые. Если какая-нибудь точка x_1 красная, то, в силу теоремы Абеля, красными будут все точки оси абсцисс, лежащие дальше от начала O , чем x_1 , по обе его стороны.

Так как всякая точка оси абсцисс есть либо голубая, либо красная, то из сказанного следует, что, идя от начала O вправо по оси абсцисс, мы сначала будем встречать лишь голубые точки, а потом только красные, причем самая граничная точка ξ голубой и красной части *может оказаться того или другого цвета*. И то же самое происходит налево от начала O , причем обе граничные точки ξ и ξ' разноцветных частей лежат по разные стороны от начала O на одинаковом расстоянии ρ .

Указанный промежуток $(-\rho, +\rho)$ называется *промежутком сходимости* данного степенного ряда (1), так как внутри него имеется сходимость ряда, а за его границами расходимость. В самих же граничных точках $\xi' = -\rho$ и $\xi = +\rho$ может быть, в зависимости от случая, и то, и другое (рис. 70).

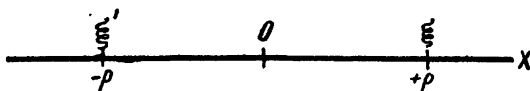


Рис. 70

Практическое определение длины промежутка сходимости степенного ряда.

Лемма. Если для степенного ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ имеем $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, то $\rho = \frac{1}{L}$.

Доказательство. Применим признак Д'Аламбера к ряду $|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots$. Составим для этого отношение $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}$ и найдем его предел при $n \rightarrow +\infty$. Имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| = L \cdot |x|. \quad (2)$$

Отсюда ясно, что при $|x| < \frac{1}{L}$ этот предел строго меньше единицы, и поэтому имеем сходимость. Но при $|x| > \frac{1}{L}$ этот предел строго больше единицы, и поэтому, имея с некоторого момента неравенства $|a_kx^k| < |a_{k+1}x^{k+1}| < \dots < |a_nx^n| < \dots$, мы видим, что невозможно, чтобы член a_nx^n стремился к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

А это говорит, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $|x| > \frac{1}{L}$.

Отсюда следует, что $\frac{1}{L} = \rho$.

ч. т. д.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots \quad (3)$$

Решение. Применение практического правила для определения ρ дает:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1.$$

Итак, промежуток сходимости есть $(-1, +1)$. Теперь надо исследовать область сходимости. Для этого надо исследовать лишь самые граничные точки $x = +1$ и $x = -1$.

Если $x = +1$, ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ есть убывающий знакочередующийся, значит, сходящийся. Если $x = -1$, имеем $-1 - \frac{1}{2^2} -$

$-\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots$ Ряд *сходится* (см. § 69, случай 3). Область сходимости изображена на рис. 71.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots$$

Решение. Применяем практическое правило:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Поэтому данный ряд сходится для *всех* x .

ЗАДАЧИ

Найти области сходимости следующих рядов:

1. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Отв. $-1 < x < +1$.

2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Отв. $-1 < x \leq +1$.

3. $x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \dots$

Отв. $-1 < x < +1$.

Графическое изображение областей сходимости¹

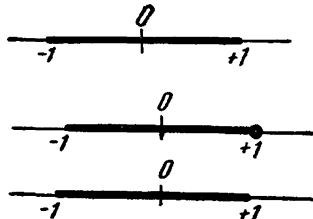


Рис. 72

¹ Если граничная точка промежутка сходимости $(-\rho, +\rho)$ входит в область сходимости, мы ее отмечаем черной точкой; если не входит, мы не отмечаем никак.

$$4. x + \frac{x^3}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \dots$$

Отв. $-1 \leq x < 1$.

$$5. 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Отв. Все x .

$$6. 1 - \frac{\Phi^2}{2!} + \frac{\Phi^4}{4!} - \frac{\Phi^6}{6!} + \dots$$

Отв. Все Φ .

$$7. 1 - \frac{\Phi^3}{3!} + \frac{\Phi^5}{5!} - \frac{\Phi^7}{7!} + \dots$$

Отв. Все Φ .

$$8. x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

Отв. $-1 \leq x \leq +1$.

$$9. 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

Отв. $-1 < x < +1$.

$$10. 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \dots$$

Отв. $-1 \leq x \leq +1$.

$$11. 2x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

Отв. Все x .

$$12. \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$$

Отв. $-3 \leq x < +3$.

$$13. 1 + \frac{x^3}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

Отв. $-1 < x < +1$.

$$14. \frac{2x}{2} + \frac{2^2 x^2}{5} + \frac{2^3 x^3}{10} + \dots + \frac{2^n x^n}{n^2 + 1} + \dots$$

Отв. $-\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2}$.

$$15. 1 + \frac{x}{2 \cdot 1} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4} + \dots$$

Отв. $-2 \leq x < 2$.

$$16. \frac{1}{3} + \frac{2x}{2 \cdot 3^2} + \frac{3x^2}{2^2 \cdot 3^3} + \frac{4x^3}{2^3 \cdot 3^4} + \dots$$

Отв. $-6 < x < +6$.

Графическое изображение
областей сходимости

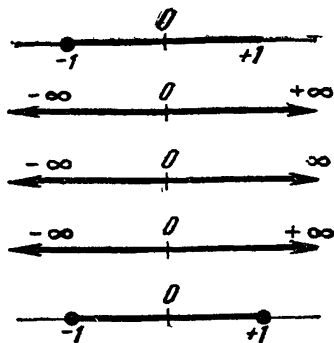


Рис. 73

$$17. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{2x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4x^4}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Отв. $-2 \leq x < 2$.

$$18. 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 = 24x^4 + \dots$$

$$19. \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{8} + \frac{8x^4}{15} + \dots + \frac{2^{n-1}x^n}{n^2-1} + \dots$$

$$20. \frac{1}{3^2} + \frac{x}{3^3} + \frac{x^2}{3^4} + \frac{x^3}{3^5} + \dots$$

$$21. 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

$$22. 10x + 100x^2 + 1000x^3 \dots$$

$$23. 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \dots$$

$$24. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

§ 81. Сумма степенного ряда. Пусть

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

данный степенной ряд, имеющий промежуток сходимости $(-p, +p)$. Тогда, по теореме Абеля (§ 80), ряд (1) правильно сходится на всяком отрезке $[a, b]$, содержащемся в промежутке

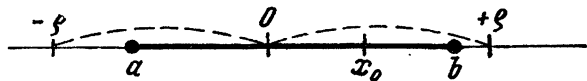


Рис. 74

сходимости (рис. 74). Отсюда следует, что если мы обозначим через $f(x)$ сумму степенного ряда в его области сходимости

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (2)$$

то $f(x)$ есть непрерывная функция на всяком отрезке $[a, b]$, лежащем в промежутке сходимости.

В частности $f(x)$ непрерывна во всякой точке x_0 , содержащейся в промежутке сходимости.

§ 82. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Пусть степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

имеет промежуток сходимости $(-p, +p)$. Продифференцируем формально почленно этот степенной ряд. Мы получим новый степенной ряд

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Лемма. *Продифференцированный степенной ряд имеет тот же самый промежуток сходимости, что и первоначальный степенной ряд.*

Доказательство. Во-первых, по теореме Абеля (§ 80) мы знаем, что на всяком данном отрезке $[a, b]$, лежащем в промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$, первоначальный ряд (1) есть *правильно сходящийся* и имеет мажорантой некоторую геометрическую прогрессию $1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n + \dots$, где θ есть фиксированное для отрезка $[a, b]$ положительное число, *меньше единицы*, $0 < \theta < 1$. Это означает, что на отрезке $[a, b]$ имеем неравенство $|a_n x^n| < \theta^n$, когда n превысит надлежащую грань N , $n \geq N$.

Для общего члена продифференцированного ряда (2) мы имеем неравенство:

$$|na_n x^{n-1}| = \frac{n}{|x|} \cdot |a_n x^n| < \frac{n}{|x|} \cdot \theta^n = \frac{\theta}{|x|} \cdot n\theta^{n-1},$$

когда $n \geq N$; здесь x — какая-нибудь фиксированная точка отрезка $[a, b]$, отличная от начала O .

Так как ряд $1 + 2\theta + 3\theta^2 + \dots + n\theta^{n-1}$ есть сходящийся для $0 < \theta < 1$ (это следует из признаков сходимости, но можно и прямо указать его сумму: $\frac{1}{(1-\theta)^2}$), то отсюда следует, что степенной ряд (2) сходится всюду в промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$ ряда (1).

Во-вторых, если какая-нибудь фиксированная точка x находится за границами промежутка сходимости $(-\rho, +\rho)$, т. е. если $|x| > \rho$, то из доказательства теоремы Абеля (§ 80) следует, что общий член $a_n x^n$ первоначального ряда (1) не может стремиться к нулю, когда $n \rightarrow -\infty$ ¹. Отсюда же следует, что и $a_n x^{n-1}$ не может стремиться к нулю, и тем более произведение $na_n x^{n-1}$ не может стремиться к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$. А это и означает, что продифференцированный ряд (2) наверное будет расходящимся в рассматриваемой точке x .

Таким образом, продифференцированный ряд (2) сходится в промежутке $(-\rho, +\rho)$ и расходится за его границами. Следовательно, $(-\rho, +\rho)$ служит промежутком сходимости для обоих степенных рядов: первоначального (1) и продифференцированного (2), ч. т. д.

¹ Отсылая учащегося к самому доказательству теоремы Абеля (§ 80), мы указываем на то, что оно, собственно, и не требует неперенной *сходимости* степенного ряда (1) в точках x_0 , но лишь только того, чтобы член $a_n x_0^n$ оставался *ограниченным* по абсолютной величине, когда $n \rightarrow +\infty$. Ибо нам совсем не нужно, чтобы величина η , где $|a_n x_0^n| < \eta$, стремилась к нулю. Все доказательство Абеля остается в силе по-прежнему, откуда следует, что во всякой точке x , находящейся за границами промежутка сходимости $(-\rho, +\rho)$, не только степенной ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ расходится, но его общий член $a_n x^n$ не может оставаться даже ограниченным, когда $n \rightarrow +\infty$.

Так как степенной ряд есть *равномерно* сходящийся на каком угодно фиксированном отрезке $[a, b]$, лежащем в его промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$, то из свойств II и III равномерно сходящихся рядов (§ 79) следует, что степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3)$$

можно *какое угодно число раз* почленно дифференцировать и интегрировать в его промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$, причем получаемые таким образом степенные ряды будут иметь тот же самый промежуток сходимости $(-\rho, +\rho)$.

Таким образом, дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и, интегрируя, имеем:

$$\int_0^x f(t) dt = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

и т. д.

Отсюда мы прежде всего заключаем, что сумма $f(x)$ всякого степенного ряда (3)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3)$$

есть совершенно особенная функция, ибо она имеет не только первую производную $f'(x)$, но и вторую $f''(x)$ и третью $f'''(x)$, и, вообще, любую n -ю производную $f^{(n)}(x)$, каково бы ни было натуральное число n , причем все эти производные непрерывны в каждой точке x , лежащей в промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$.

Можно коротко назвать суммы $f(x)$ степенных рядов *безгранично дифференцируемыми функциями*.

§ 83. Бесконечный ряд Маклорена. Пусть степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

имеет промежутком сходимости $(-\rho, +\rho)$, где $\rho > 0$.

Дифференцируя его бесконечное число раз:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= \dots \dots \dots 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots na_n + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и полагая всюду $x = 0$, мы получаем

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1 \cdot a_1, \quad f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2, \quad f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 \dots$$

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n a_n, \dots$$

Отсюда мы приходим к следующему важнейшему заключению:
зная, что безгранично дифференцируемая функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

но не зная его коэффициентов, мы можем их все определить по формуле Маклорена:

$$a_0 = f(0), \quad a = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots \quad (2)$$

Когда степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ имеет промежутком сходимости $(-\rho, +\rho)$ и в нем суммой функцию $f(x)$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (1)$$

тогда мы говорим, что *функция $f(x)$ разложена в промежутке $(-\rho, +\rho)$ в степенной ряд*, и тогда, в силу формул (2), мы имеем тождество

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1)$$

Разложение (1) носит название *бесконечного ряда Маклорена*.

§ 84. Сопоставление бесконечного ряда Маклорена с конечной формулой Маклорена. Не следует думать, что бесконечный ряд Маклорена (1) сам по себе чрезвычайно ясен и что не стоит, поэтому, спрашивать о его законности. Здесь кроется большая тонкость.

Именно, на первый взгляд кажется, что когда мы имеем какую-нибудь безгранично дифференцируемую функцию $f(x)$, то весьма просто ее «разложить в степенной ряд»: для этого стоит только вычислить все ее производные для $x = 0$, т. е. подсчитать $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., далее, разделить их соответственно на 1, 1!, 2!, 3!, ... и, наконец, составить из полученных коэффициентов бесконечный ряд Маклорена (1). И на первый взгляд кажется, что здесь нет места никаким сомнениям, ибо представляется, что бесконечный ряд Маклорена должен сходиться и должен иметь суммой разлагаемую функцию $f(x)$. Но в действительности дело обстоит гораздо сложнее и тоньше.

Во-первых, составленный по правилу Маклорена для заданной функции $f(x)$ бесконечный ряд (1) может оказаться *расходящимся всюду* (кроме точки $x=0$). Это происходит тогда, когда подсчитанные производные $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{(n)}(0)$, ... с чересчур большой силой возрастают по величине, когда $n \rightarrow +\infty$. Например, если $f^{(n)}(0) = (n!)^2$, ряд Маклорена всюду расходится (кроме $x=0$) и не служит ни к чему.

Во-вторых, составленный по правилу Маклорена для заданной функции $f(x)$ бесконечный ряд (1), хотя и может оказаться сходящимся в его промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$, $\rho > 0$, однако суммой этого степенного ряда может оказаться вовсе не заданная функция $f(x)$, а совершенно посторонняя функция $\Phi(x)$, чуждая функции $f(x)$ и никак с нею не связанная [кроме равенств $f^{(n)}(0) = \Phi^{(n)}(0)$].

Например, если $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, причем мы полагаем $f(0) = 0$, то имеем $0 = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots$. Поэтому степенной ряд, вычисленный по правилу Маклорена, будет $0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n + \dots$, его сумма тождественно равна нулю и, значит, вовсе не равна «разлагаемой» функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Все, что можно извлечь из формулы Маклорена, это только то, что, если рассматриваемая функция $f(x)$ способна служить суммой степенного ряда, то такой ряд имеется *только один* и его коэффициенты должны тогда определяться по правилу Маклорена. Но на основной вопрос:

может ли данная безгранично дифференцируемая функция $f(x)$ быть суммой степенного ряда, т. е. возможно ли ее разложение в ряд степеней, бесконечный ряд Маклорена ответить не может.

В целях решения этого вопроса обычно прибегают к конечной формуле Маклорена, устанавливающей оценку разности между рассматриваемой функцией $f(x)$ и суммой n первых членов бесконечного ряда Маклорена; эту разность обозначают через $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} \right]. \quad (1)$$

Ясно, что для того, чтобы *сумма бесконечного ряда Маклорена (1) была равна функции $f(x)$ в промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$ этого ряда, необходимо и достаточно чтобы имели*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

всюду в промежутке $(-\rho, +\rho)$.

Так как равенство (1) можно переписать в виде:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n(x), \quad (2)$$

то называют это равенство *конечной формулой* (не «рядом») *Маклорена*, а количество $R_n(x)$, стоящее последним в правой части, *дополнительным членом* (или, неправильно, «остатком»).

Для того чтобы безгранично дифференцируемая функция разлагалась в промежутке $(-p, +p)$ в сходящийся ряд степеней, необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член стремился к нулю всюду в этом промежутке, когда n безгранично возрастает.

Исследование дополнительного члена $R_n(x)$ иногда представляется трудным и, чтобы уйти от такого исследования, обычно разлагают в степенные ряды *функции комплексного переменного*, для которых имеются могущественные общие принципы, делающие совершенно ненужным рассмотрение члена $R_n(x)$. Эти принципы составляют предмет *теории функций комплексного переменного* (см. следующую главу). Но поскольку здесь речь идет о *действительном переменном*, приходится войти в оценку этого дополнительного члена $R_n(x)$.

В целях наибольшего удобства ему дают *различные формы*. Одни из этих форм удобны для одних функций $f(x)$, другие — для других. Общих правил здесь нет. Мы здесь укажем простейшую из форм дополнительного члена $R_n(x)$, вытекающую из теоремы о среднем Тейлора (см. часть I, § 145). Именно, полагая в формуле среднего Тейлора $a=0$ и $a=x$, мы находим:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \quad (3)$$

где ξ есть *величина средняя*, находящаяся между 0 и x . Из этого равенства следует простейшая форма дополнительного члена, а именно:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n. \quad (4)$$

Правую часть этого равенства принято называть «остаточным членом в форме Лагранжа». Пользование этой формой во многих случаях затруднительно, так как неизвестно, в каком месте отрезка $[0, x]$ находится средняя величина ξ . Однако для трех функций: e^x , $\sin x$ и $\cos x$ остаточный член в форме Лагранжа довольно быстро приводит к цели.

Пример 1. Разложить в степенной ряд $f(x) = e^x$.

Решение. Имеем $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, ... Значит, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, и остаточный член в форме Лагранжа будет $R_n(x) = e^\xi \cdot \frac{x^n}{n!}$, где ξ промежуточное число между 0 и x . Отсюда следует, что

$$|R_n(x)| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!}.$$

Но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ есть везде сходящийся. Значит, имеем $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$.

Поэтому $R_n(x) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$ для любого x .

Окончательно, для всякого x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (5)$$

Пример 2. Разложить в степенной ряд $f(x) = \sin x$.

Решение. Имеем $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ и $f^{IV}(x) = \sin x$. Дальше производные, очевидно, повторяются *периодически*. Общая формула для n -й производной: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$. Для $x = 0$ имеем $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$ и т. д. Следовательно, мы имеем период из четырех чисел: 0, 1, 0, -1. Остаточный член в форме Лагранжа будет:

$$R_n(x) = \sin\left(\xi + n \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Следовательно, $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$ для всякого x при $n \rightarrow +\infty$. Окончательно, имеем *сходящееся всюду* разложение:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (6)$$

Пример 3. Разложить в степенной ряд $f(x) = \cos x$.

Решение. Можно было бы проделать такое же исследование остаточного члена в форме Лагранжа, какое было сделано для $\sin x$. Но ясно, что делать это не стоит, потому что можно воспользоваться правом дифференцировать *сходящиеся степенные ряды*. Таким образом, дифференцируя почленно разложение (6), мы сразу получаем разложение Маклорена для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (7)$$

сходящееся для всякого x .

Для того, чтобы произвести разложение в степенные ряды других функций, необходимо сначала придать остаточному члену $R_n(x)$ другую форму, ибо форма Лагранжа оказывается уже недостаточной, и уже затем, пользуясь этими другими формами, устанавливать сходимость рядов Маклорена к заданным функциям $f(x)$ в их промежутке

сходимости. Но такое исследование даже для элементарных функций представляется затруднительным.

К счастью, помимо этого прямого пути, состоящего в переходе от *конечной формулы* Маклорена к *бесконечному ряду Маклорена*, имеется косвенный путь, чрезвычайно богатый различными возможностями. Этот путь состоит в том, что *рассматривают прямо бесконечный ряд Маклорена*, сначала определяют его промежуток сходимости, а потом, на основании *арифметического состава коэффициентов этого ряда*, узнают, какую именно функцию он изображает. Этот способ мы применим к биномиальному ряду.

§ 85. Биномиальный ряд. Этот важный ряд имеет вид:

$$1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^n x^n + \dots, \quad (1)$$

где коэффициенты вычисляются по формуле:

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}. \quad (2)$$

Ясно, что в случае, когда число m есть натуральное, т. е. целое положительное, тогда коэффициент C_m^n равен «числу сочетаний из m предметов по n », и что тогда ряд (1) автоматически обрывается на члене x^m , ибо все дальнейшие члены имеют коэффициенты равными нулю. И в этом случае сумма ряда (1) равна $(1+x)^m$, как этому учит бином Ньютона.

Если же число m не есть натуральное и не равно нулю, тогда никакой из коэффициентов C_m^n не делается равным нулю, и степенной ряд (1) является действительно *бесконечным*. Мы хотим определить в этом случае его *промежуток сходимости* ($-r, +r$) и найти в нем его *сумму*.

Составляя, по признаку Д'Аламбера (§ 69), отношение

$$\frac{C_m^{n+1} x^{n+1}}{C_m^n x^n} = \frac{m-n}{n+1} x,$$

мы видим, что имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|C_m^{n+1} x^{n+1}|}{|C_m^n x^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \cdot |x| = |x|.$$

Поэтому биномиальный ряд (1) сходится, когда $|x| < 1$ и расходится, когда $|x| > 1$, ибо тогда его члены не могут стремиться к нулю.

Таким образом, *промежуток сходимости биномиального ряда (1) есть $(-1, +1)$* , когда число m не есть натуральное или равное нулю.

Чтобы найти сумму биномиального ряда (1), мы ее обозначим

$$f(x) = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^n x^n + \dots \quad (1^*)$$

Дифференцируя это равенство (что мы имеем право делать), мы находим:

$$f'(x) = C_m^1 + 2C_m^2 x + \dots + nC_m^n x^{n-1} + \dots \quad (3)$$

Умножив на x обе части этого равенства, имеем:

$$xf'(x) = C_m^1 x + 2C_m^2 x^2 + \dots + nC_m^n x^n + \dots$$

Прибавив к предыдущему, получаем:

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= C_m^1 + (2C_m^2 + C_m^1)x + \dots + \\ &+ [(n+1)C_m^{n+1} + nC_m^n]x^n + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислим коэффициенты ряда (4). По формуле (2) находим

$$\begin{aligned} (n+1)C_m^{n+1} + nC_m^n &= (n+1) \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} + \\ &+ n \frac{m(m-1)\dots(m-n-1)}{n!} = \\ &= \frac{m(m-1)\dots(m-n-1)}{n!} \cdot [(m-n) + n] = mC_m^n. \end{aligned}$$

Значит, равенство (4) перепишется в виде:

$$(1+x)f'(x) = m[1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^n x^n + \dots],$$

что дает

$$(1+x)f'(x) = mf(x). \quad (5)$$

Соотношение (5) немедленно нам дает неизвестную функцию $f(x)$. В самом деле, имеем:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{m}{1+x}.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln f(x) = \int \frac{m}{1+x} dx = m \ln(1+x) + C = \ln(1+x)^m + C.$$

Отсюда

$$f(x) = e^C \cdot (1+x)^m. \quad (6)$$

И так как при $x=0$ биномиальный ряд имеет величину, равную 1, то $f(0)=1$. Полагая в равенстве (6) $x=0$, находим $1=e^C$.

Поэтому

$$f(x) = (1+x)^m.$$

Таким образом, мы имеем *важное разложение*:

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^n x^n + \dots \quad (7)$$

в промежутке сходимости $(-1, +1)$.

Пример. Найти $\sqrt[4]{630}$ с хорошим приближением, пользуясь биномиальным рядом.

Решение. Ближайший к 630 точный квадрат есть $625 = 25^2$. Поэтому

$$\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625+5} = 25 \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В нашем случае биномиальный ряд есть

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Полагаем $x = \frac{1}{125} = 0,008$. Отсюда

$$\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 0,004 - 0,000008 + 0,000000032 - \dots$$

Значит

$$25 \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 25 + 0,1 - 0,0002 + 0,0000008 = 25,099801.$$

Так как разложение есть *убывающее* и *знакопередающее*, то ошибка в найденном числе не превышает последнего взятого члена, т. е. $< 0,0000008$.

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь биномиальным рядом, показать, что

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Проверить результат прямым делением.

2. Пользуясь биномиальным рядом, найти приближенные величины следующих чисел:

a) $\sqrt[4]{404}$

d) $\sqrt[4]{80}$

g) $\frac{1}{10,3}$

j) $\frac{1}{\sqrt[4]{620}}$

b) $\sqrt[5]{990}$

e) $\sqrt[5]{30}$

h) $\frac{1}{\sqrt[4]{102}}$

k) $\frac{1}{\sqrt[5]{1010}}$

c) $\sqrt[5]{130}$

f) $\frac{1}{98}$

i) $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$

l) $\sqrt[5]{\frac{25}{26}}$

3. Пользуясь разложением синуса (6) (см. § 84), вычислить $\sin 1$ с точностью до 4 десятичных знаков.

Решение. Имеем:

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \dots$$

Суммируя отдельно положительные и отрицательные члены, имеем:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1,00000 \\ \frac{1}{5!} & = & 0,00833 \\ \hline & & 1,00833 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{1}{3!} & = & 0,16667 \\ \frac{1}{7!} & = & 0,00020 \\ \hline & & 0,16687 \end{array}$$

Значит: $\sin 1 = 1,00833 - 0,16687 = 0,84146.$

Результат точен в пятом десятичном знаке, ибо ошибка меньше, чем $\frac{1}{9!} = 0,000003.$

§ 86. Логарифмические ряды. Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

имеет промежуток сходимости $(-1, +1)$. Заменяя x на $-x$, мы получаем:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Интегрируя этот ряд, мы имеем:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Наконец, выполняя интегрирование в левой части, мы окончательно находим разложение $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (1)$$

Мы знаем (см. § 82), что интегрирование не изменяет промежутка сходимости. Поэтому разложение (1) имеет промежутком сходимости $(-1, +1)$ и в нем суммой $\ln(1+x)$.

Но для вычисления логарифмов пользуются, однако, не рядом (1), но разложением в степенной ряд функции $\ln \frac{1+x}{1-x}$. Чтобы его иметь, заменим в разложении (1) x на $-x$. Мы получаем ряд:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

с тем же самым промежутком сходимости $(-1, +1)$. Вычитая из (1) этот ряд, мы находим:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]. \quad (2)$$

Промежуток сходимости полученного ряда $(-1, +1)$.

Пример. Оценка логарифмов.

Чтобы привести ряд (2) к форме, более удобной для оценки, возьмем два положительные числа M и N , причем пусть $M > N$. Полагая

$$x = \frac{M-N}{M+N}, \text{ имеем } \frac{M}{N} = \frac{1+x}{1-x},$$

причем, очевидно, что $0 < x < 1$ для всех положительных M и N , $M > N$. Ряд (2) дает:

$$\ln \frac{M}{N} = 2 \left[\left(\frac{M-N}{M+N} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^5 + \dots \right]. \quad (3)$$

Этот ряд сходится для всех положительных M и N , $M > N$, и хорошо приспособлен к оценке.

Например, пусть $M = 2$ и $N = 1$. Тогда $\ln \frac{M}{N} = \ln 2$ и $\frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{3}$.

Подстановка в (3) дает: $\ln 2 = 0,69315\dots$

Далее, пусть $M = 3$ и $N = 2$. Тогда

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \dots \right] = 1,09861\dots$$

Необходимо вычислить логарифмы лишь *простых чисел*, ибо логарифмы составных чисел находятся при помощи их. Например,

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 = 2,07944\dots$$

$$\ln 6 = \ln 3 + \ln 2 = 1,79176\dots$$

Вычисленные логарифмы суть *логарифмы натуральные* или *логарифмы Непера*, имеющие основанием число $e = 2,718281828459045\dots$. Чтобы иметь *логарифмы Бригга* или *логарифмы обыкновенные*, имеющие основанием 10, надо переменить основание посредством формулы

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}.$$

Например,

$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{0,693\dots}{2,302\dots} = 0,301\dots$$

§ 87. Разложение аркус-тангенса. Берем разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots,$$

получающееся заменой в разложении $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ буквы x на $-x^2$. Поэтому промежуток сходимости его тот же самый: $(-1, +1)$. Интегрируя написанный ряд (1) от 0 до x , мы прямо получаем:

$$[\arctg x] = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad (2)$$

это разложение имеет промежуток сходимости $(-1, +1)$, ибо промежуток сходимости не изменяется ни дифференцированием, ни интегрированием (§ 82). Суммой этого разложения является *основная ветвь* $\arctg x$ (см. часть 1, § 100), а не какая-нибудь иная. Поэтому $\arctg x$ написан в квадратных скобках.

§ 88. Разложение аркус-синуса. Возьмем разложение

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^n x^n + \dots, \quad (1)$$

имеющее промежуток сходимости *всегда* $(-1, +1)$, кроме того случая, когда ряд (1) автоматически обрывается, т. е. когда m целое положительное или нуль. Полагая $m = -\frac{1}{2}$ и заменяя букву x на $-x^2$, мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 - C_{-\frac{1}{2}}^1 x^2 + C_{-\frac{1}{2}}^2 x^4 - C_{-\frac{1}{2}}^3 x^6 + \dots + \\ &+ (-1)^n C_{-\frac{1}{2}}^n x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Интегрируя от 0 до x , находим:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= x - C_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{3} + C_{-\frac{1}{2}}^2 \frac{x^5}{5} - C_{-\frac{1}{2}}^3 \frac{x^7}{7} + \dots + \\ &+ (-1)^n C_{-\frac{1}{2}}^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Левая часть равенства (2) есть *основная ветвь* $\arcsin x$, т. е. $[\arcsin x]$, а не какая-либо другая (см. часть I, § 100). Остается найти вид коэффициентов в правой части. Имеем:

$$\begin{aligned} C_{-\frac{1}{2}}^n &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}-1\right) \left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (2) перепишется в виде:

$$[\arcsin x] = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \dots$$

Разложение имеет промежутком сходимости $(-1, +1)$.

ЗАДАЧИ

Проверить следующие разложения функций в ряды Маклорена и определить их промежутки сходимости:

$$1. \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + x - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

Отв. Все x .

$$2. \ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}} + \dots$$

Отв. $(-a, +a)$

Проверить следующие разложения:

$$3. \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$4. \operatorname{sc} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots$$

$$5. \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + x - \frac{\sqrt{3}x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sqrt{3}x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right).$$

$$6. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \dots$$

$$7. \arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$8. \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$9. \ln(x + \sqrt{1-x^2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} - \dots$$

$$10. \ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \dots$$

Найти три члена разложения Маклорена для каждой из следующих функций:

$$11. \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$13. e^{\sin \theta}.$$

$$12. \sin(x+1).$$

$$14. \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Получить следующие величины прямой подстановкой в степенные ряды и подсчетом достаточного количества членов:

$$15. e = 2,7182\dots$$

Решение. Берем разложение $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ и полагаем в нем $x = 1$. Тогда $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$

| | | | | |
|-----------|----------------|-------|------------|-------|
| Первый | член = 1,00000 | | | |
| Второй | » = 1,00000 | | | |
| Третий | » = 0,50000 | | | |
| Четвертый | » = 0,16667... | (деля | предыдущий | на 3) |
| Пятый | » = 0,04167... | { | » | » 4) |
| Шестой | » = 0,00833... | { | » | » 5) |
| Седьмой | » = 0,00139... | { | » | » 6) |
| Восьмой | » = 0,00020... | { | » | » 7) |

Итого: $e = 2,7182...$

16. $\text{arc tg} \left(\frac{1}{5} \right) = 0,1973...$ 20. $\text{arc sin } 1 = 1,5708...$
 17. $\cos 1 = 0,5403...$ 21. $\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071...$
 18. $\cos 10^\circ = 0,9848...$ 22. $\sin 0,5 = 0,4794...$
 19. $\sin 0,1 = 0,0998...$ 23. $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + ... = 7,3891...$
 24. $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + ... + 1,6487...$

§ 89. Действия над степенными рядами. Пусть даны два степенные ряда:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

Предполагается, что промежуток сходимости первого ряда есть $(-A, +A)$ и второго $(-B, +B)$, где $A > 0$ и $B > 0$.

Эти ряды можно комбинировать между собой посредством следующих действий:

I. *Сложения.* Получаем новый степенной ряд:

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots;$$

II. *Вычитания.* Получаем новый степенной ряд:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots + (a_n - b_n)x^n + \dots;$$

III. *Умножения.* Получаем новый степенной ряд:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + \\ + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)x^n + \dots$$

Эти действия законны для таких численных значений x , которые лежат в промежутке сходимости и первого ряда $(-A, +A)$, и второго ряда $(-B, +B)$, ибо тогда ряды абсолютно сходятся и их можно складывать, вычитать и перемножать, как обыкновенные конечные суммы (§ 71). Поэтому полученные новые степенные ряды имеют промежуток сходимости заведомо не меньший, чем самый малый из обоих промежутков сходимости $(-A, +A)$ и $(-B, +B)$.

Совсем другое дело, когда приходится делить степенные ряды.
IV. Деление. Когда делим степенные ряды один на другой:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

то, если a_0 отлично от нуля, их частное представимо в виде степенного ряда тогда и только тогда $b_0 \neq 0$, ибо иначе величина $f(0)$ будет бесконечно большой.

Прибавим к этому, что промежуток сходимости нового степенного ряда $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$, получающегося в результате деления, трудно определить и он может оказаться много меньше, чем оба промежутка сходимости $(-A, +A)$ и $(-B, +B)$.

Чтобы получить коэффициенты c_0, c_1, c_2, \dots , надо перемножить ряды $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ и $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ и приравнять коэффициенты этого произведения коэффициентам ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, т. е. надо написать:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0, \\ a_1 &= b_1c_0 + b_0c_1, \\ a_2 &= b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Тогда мы имеем уравнения, из которых, один за другим, находим неизвестные коэффициенты частного ряда c_0, c_1, c_2, \dots

Пример 1. Найти степенной ряд для $e^x \sin x$.

Решение. Имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Перемножая ряды, находим:

$$e^x \sin x = x + x^3 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \text{члены с } x^6 \text{ и т. д.}$$

Пример 2. Найти ряды для $\operatorname{sc} x$ из ряда для $\cos x$.

Решение. Имеем $\operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x}$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Здесь проще всего, при делении, прибегнуть к следующему приему.
Пологаем $\cos x = 1 - z$. Тогда $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \dots$

С другой стороны, $\operatorname{sc} x = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ для $|z| < 1$.

Ясно, что $z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \dots$, $z^3 = \frac{x^6}{8} + \dots$ Отсюда

$$\operatorname{sc} x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots$$

ЗАДАЧИ

Проверить следующие ряды:

$$1. e^{-\theta} \sin \theta = \theta - \theta^2 + \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^4}{30} + \dots$$

$$2. \frac{\cos x}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{13x^4}{24} + \dots$$

$$3. \frac{\sin x}{1-x} = x + x^3 + \frac{5x^5}{6} + \frac{5x^7}{6} + \frac{101x^9}{120} + \dots$$

$$4. \sin^3 x = x^3 - \frac{2x^5}{3!} + \frac{32x^7}{6!} + \dots$$

$$5. (1+x) \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$6. \frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + \dots$$

$$7. e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$

$$8. \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots$$

$$9. \sin x \cos \sqrt{x} = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} + \dots$$

$$10. \frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + \dots$$

$$11. (1-x) \arcsin x = x - x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{3x^6}{40} + \dots$$

$$12. (1+x) \operatorname{arctg} x = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{5} - \dots$$

$$13. x \sin \frac{x}{2} = \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{48} + \frac{x^7}{3840} - \dots$$

$$14. e^{-x} \cos \sqrt{x} = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{25x^2}{24} - \frac{331x^3}{720} + \dots$$

$$15. e^{\frac{x}{2}} \sin 2x = 2x + x^2 - \frac{13x^3}{12} - \frac{5x^4}{8} + \dots$$

$$16. \sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \dots$$

Для следующих функций найти все члены рядов, содержащие степени меньше чем x^5 .

$$17. e^{-\frac{x}{2}} \cos x.$$

$$18. \frac{\sin 2x}{\cos x}.$$

$$19. e^x \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

$$20. \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$21. \sqrt{2 - \cos x}.$$

$$22. \sqrt{1+x} \ln(1-x).$$

Пользуясь логарифмическим рядом (3) (см. § 86) и зная, что $\ln 2 = 0,69315$ и $\ln 3 = 1,09861$, вычислить следующие логарифмы.

$$23. \ln 5 = 1,60944 \dots$$

$$25. \ln 11 = 2,39790 \dots$$

$$24. \ln 7 = 1,94591 \dots$$

$$26. \ln 13 = 2,56495 \dots$$

27. Найти ряд для $\operatorname{sc}^2 x$, дифференцируя ряд для $\operatorname{tg} x$.

28. Найти ряд для $\ln \cos x$, интегрируя ряд для $\operatorname{tg} x$.

29. Найти приближенную величину интеграла $\int_0^1 \sin(x^2) dx$.

Решение. Заменяя в разложении $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ букву x на x^2 , имеем $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$. Отсюда

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \dots \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} \right]_0^1 \approx 0,3333 - 0,0238 + 0,0008 = 0,3103.$$

Употребляя ряды, найти приближенно величины следующих интегралов:

30. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$. Отв. 0,764.

36. $\int_0^1 e^x \cos \sqrt{x} dx$.

31. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Отв. 0,747.

37. $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+x^2) dx$.

32. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x}) dx$. Отв. 0,071.

38. $\int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{4-x}}$.

33. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}} dx$. Отв. 0,9226.

39. $\int_0^1 \sqrt{2-\cos x} dx$.

34. $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x}}$. Отв. 0,0214.

40. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{\cos x} dx$.

35. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

§ 90. Ряды Тейлора. Бесконечным рядом Тейлора называется ряд, расположенный по восходящим степеням разности $x - a$ и имеющий постоянные коэффициенты, т. е. ряд вида:

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Если мы положим

$$x - a = z,$$

то тогда ряд Тейлора (1) напишется в виде:

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots \quad (2)$$

и, значит, явится бесконечным рядом Маклорена для независимого переменного z . Мы знаем, что ряд Маклорена (2) должен абсолютно сходиться в некотором промежутке $(- \rho, + \rho)$ и должен расходиться за его границами, так как там его члены *не могут*

стремиться к нулю. Итак, ряд (2) сходится, когда $|z| < \rho$, и расходится, если $|z| > \rho$.

Так как $|z| = |x - a|$, то отсюда имеем предложение: *ряд Тейлора $b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots$ абсолютно сходится внутри некоторого промежутка $(a - \rho, a + \rho)$ и расходится за его границами, так как его члены там не могут стремиться к нулю.*

Этот промежуток $(a - \rho, a + \rho)$, имеющий своим центром (серединой) точку a , называется *промежутком сходимости ряда Тейлора* (рис. 75), а про функцию $f(x)$, являющуюся суммой ряда

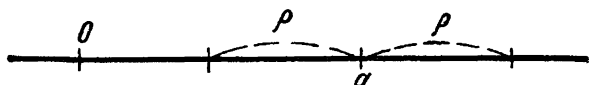


Рис. 75

Тейлора в промежутке $(a - \rho, a + \rho)$, говорят, что она *«разложена в ряд по степеням $x - a$ »* или что *«функция $f(x)$ разложена в ряд Тейлора в точке a »*. В этом случае равенство:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n + \dots \quad (3)$$

имеющее силу во всем промежутке $(a - \rho, a + \rho)$, называют *«разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в точке a »*.

Эта терминология тем более уместна, что коэффициенты b_0, b_1, b_2, \dots ряда Тейлора (3) *определимы через значения функции $f(x)$ и всех ее производных в точке a .*

Чтобы видеть это, достаточно обозначить через $\varphi(z)$ сумму ряда Маклорена (2) в его промежутке сходимости $(-\rho, +\rho)$:

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots \quad (4)$$

Мы знаем, что в этом случае функция $\varphi(z)$ есть функция *безгранично дифференцируемая* по аргументу z и что коэффициенты b_0, b_1, b_2, \dots определяются по формуле Маклорена:

$$b_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}. \quad (5)$$

Но после подстановки $z = x - a$ ряд Маклорена (4) переписывается в виде ряда Тейлора (3). Значит, имеем тождество

$$\varphi(x - a) = f(x), \quad (6)$$

дифференцируя которое по букве x раз за разом, мы находим: $\varphi'(x - a) = f'(x)$, $\varphi''(x - a) = f''(x)$, \dots , $\varphi'''(x - a) = f'''(x)$, \dots . Полагая в (6) и в этих равенствах $x = a$, мы получаем окончательно:

$$\varphi(0) = f(a), \varphi'(0) = f'(a), \varphi''(0) = f''(a), \dots, \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a), \dots \quad (7)$$

Подставляя в равенство (5) найденную величину $f^n(0)$, мы имеем правило Тейлора:

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (8)$$

в силу которого ряд Тейлора (3) в точке a получает окончательный вид:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ & + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \end{aligned} \quad (I)$$

Мы еще раз указываем на то, что ряд Тейлора сходится в некотором промежутке $(a-\rho, a+\rho)$, *имеющем точку a своим центром*, и расходится за его границами. Сумма $f(x)$ ряда Тейлора (I) безгранично дифференцируема в промежутке сходимости $(a-\rho, a+\rho)$, самый же ряд Тейлора (I) есть правильно сходящийся на всяком отрезке $[c, d]$, содержащемся в промежутке сходимости $(a-\rho, a+\rho)$.

Число ρ , служащее половиной длины промежутка сходимости ряда Тейлора (I), во многих случаях можно узнать по правилу определения промежутка сходимости ряда Маклорена (4), т. е. найдя предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = L,$$

мы имеем:

$$\rho = \frac{1}{L}.$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (I), носит название *бесконечного ряда Тейлора*, и его не нужно путать с *конечной формулой Тейлора*:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ & + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \end{aligned}$$

выведенной нами в части I, § 145, и названной нами тогда теоремой о среднем Тейлора¹, ибо число ξ , содержащееся в последнем слагаемом конечной формулы Тейлора, есть *число среднее*, содержащееся между a и x , но где именно лежит оно внутри отрезка $[a, x]$, мы не знаем.

¹ Там мы вместо буквы x писали букву b .

Этот последний член конечной формулы Тейлора называется *дополнительным членом* (или, менее правильно, «остаточным членом») и его обозначают через $R_n(x)$.

Этому дополнительному члену $R_n(x)$ дают различные формы. Форма дополнительного члена, написанная в формуле

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n,$$

где ξ есть число *промежуточное* между a и x , носит название «остаточного члена в форме Лагранжа».

Для того, чтобы безгранично дифференцируемая функция $f(x)$ в промежутке $(a-\rho, a+\rho)$ была разложима в сходящийся ряд Тейлора, в этом промежутке необходимо и достаточно, чтобы имели $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ для всякого x в промежутке $(a-\rho, a+\rho)$.

Иногда бесконечному ряду Тейлора (I) дают другой вид, полагая $a = x_0$ и $x - a = h$. Тогда, подставляя эти значения в ряд Тейлора (I), мы имеем:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \dots \quad (II)$$

Мы видим, что *новая величина* функции $f(x)$, получаемая при замене x_0 на $x_0 + h$, пишется в виде разложения по степеням буквы h .

З а м е ч а н и е. Исследование дополнительного члена $R_n(x)$ в конечной формуле Тейлора даже для элементарных функций представляется затруднительным. Поэтому для разложений в ряды Тейлора всегда прибегают к **принципам теории функции комплексного переменного**, делающим исследование дополнительного члена $R_n(x)$ совсем ненужным.

ЗАДАЧИ

Для каких величин переменного следующие ряды сходятся?

$$1. \quad 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \dots \quad \text{Отв. } 0 < x < 2$$

$$2. \quad 1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(x-2)^3}{3^2} + \frac{(x-2)^4}{4^2} + \dots \quad 1 \leq x < 3$$

$$3. \quad 1 - \frac{(x+5)^2}{2!} + \frac{(x+5)^4}{4!} - \frac{(x+5)^6}{6!} + \dots \quad \text{для всех } x$$

$$4. \quad (x+1) - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^7}{7} + \dots$$

$$5. \quad (2x-1) + \frac{(2x-1)^2}{2^2} + \frac{(2x-1)^3}{3^2} + \frac{(2x-1)^4}{4^2} + \dots$$

$$6. \quad 1 - (x+3)^2 + (x+3)^4 - (x+3)^6 + \dots$$

$$7. \quad \text{Разложить } \ln x \text{ в ряд Тейлора в точке } x=1.$$

Решение. $f(x) = \ln x, \quad f(1) = 0;$
 $f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1;$
 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -1;$
 $f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = 2.$

Подставляя в ряд Тейлора (1) эти величины, имеем:

$$\ln x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$$

Промежуток сходимости этого ряда Тейлора есть (0, 2) (см. § 86).

8. Разложить $\cos x$ в точке $\frac{\pi}{4}$.

Решение. $f(x) = \cos x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$
 $f'(x) = -\sin x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$
 $f''(x) = -\cos x, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$
 $f'''(x) = \sin x, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Следовательно,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2! \sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3! \sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$$

Ряд сходится везде, т. е. для всех x .

9. Разложить $\sin(x_0 + h)$ по степеням h .

Решение. $f(x) = \sin x \quad f(x_0) = \sin x_0$
 $f'(x) = \cos x \quad f'(x_0) = \cos x_0$
 $f''(x) = -\sin x \quad f''(x_0) = -\sin x_0.$

Подставляя в формулу (II), находим;

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + \frac{\cos x_0}{1!} h - \frac{\sin x_0}{2!} h^2 - \frac{\cos x_0}{3!} h^3 + \dots$$

10. Проверить приближенные формулы:

- (a) $\sin x = \sin a + \cos a \cdot (x - a)$
- (b) $\sin x = \sin a + \cos a \cdot (x - a) - \sin a \cdot \frac{(x - a)^2}{2}$
- (c) $\cos x = \cos a - (x - a) \cdot \sin a$
- (d) $\ln(10 + x) = 2,303 + \frac{x}{10}$
- (e) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0,5 + 0,8660x$
- (f) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2.$

Проверить следующие разложения в ряд Тейлора:

$$11. e^x = e^a \left[1 + \frac{1}{1!} (x-a) + \frac{1}{2!} (x-a)^2 + \frac{1}{3!} (x-a)^3 + \dots \right].$$

$$12. \sin x = \sin a + (x-a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \dots$$

$$13. \cos x = \cos a - (x-a) \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin a + \dots$$

$$14. \ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \dots$$

$$15. \cos(a+x) = \cos a - x \sin a - \frac{x^2}{2!} \cos a + \frac{x^3}{3!} \sin a + \dots$$

$$16. \operatorname{tg}(x+h) = \operatorname{tg} x + h \operatorname{sc}^2 x + h^2 \operatorname{sc}^2 x \cdot \operatorname{tg} x + \dots$$

$$17. (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}h^3 + \dots$$

$$18. \text{Написать первые четыре члена разложения } \sin x \text{ в ряд Тейлора в точке } \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Отв. } \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + \dots \right].$$

$$19. \text{Написать первые три члена разложения } \operatorname{tg} x \text{ в ряд Тейлора в точке } \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Отв. } \operatorname{tg} x = 1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \dots$$

$$20. \text{Разложить } \ln x \text{ в точке } x=2 \text{ с точностью до четырех членов.}$$

$$21. \text{Разложить } e^x \text{ в точке } x=1 \text{ до пяти членов.}$$

$$22. \text{Разложить } \sin x \text{ в точке } x = \frac{\pi}{6} \text{ до четырех членов.}$$

$$23. \text{Разложить } \operatorname{ctg} x \text{ в точке } x = \frac{\pi}{4} \text{ до трех членов.}$$

ГЛАВА VII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ПЕРЕМЕННЫЕ, ФУНКЦИИ

§ 91. Арифметика и алгебра комплексных чисел. Из алгебры известно, что комплексные числа

$$a + bi \tag{1}$$

подчиняются всем действиям арифметики и алгебры, которым подчинены действительные числа. Так, в частности, их можно складывать, вычитать, перемножать и делить. *Во всех этих выкладках нужно обращаться с буквой i так, как если бы она была действительным числом, но в окончательном результате никогда не нужно забывать заменять квадрат буквы i , i^2 , через отрицательную единицу -1 , т. е. везде в производимых выкладках и в окончательном результате полагать*

$$i^2 = -1. \tag{2}$$

Так, i^3 надо заменять через $-i$, ибо $i^3 = i^2 i = -1 \cdot i = -i$; далее, i^4 надо заменять просто через $+1$, ибо

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1 \text{ и т. д.}$$

Число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$, второе слагаемое bi называется *мнимой частью* комплексного числа; самое же число b называется *коэффициентом при мнимой единице*.

Сложение комплексных чисел. На основании сказанного *правила*, оно производится так:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i.$$

Окончательно:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i. \tag{I}$$

Вычитание комплексных чисел. Применяя сказанное правило, мы имеем аналогично:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = a + bi - a' - b'i = (a - a') + (b - b')i.$$

Окончательно:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i. \quad (II)$$

Умножение комплексных чисел. Применяя полностью сказанное правило, находим:

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = aa' + ab'i + a'bi - bb' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Окончательно:

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i. \quad (III)$$

Несколько сложнее деление комплексных чисел, и для его облегчения приходится ввести два важные понятия.

(1) *Сопряженные комплексные числа*. Два комплексные числа называются *сопряженными*, когда они отличаются только знаком при i .

Таким образом, комплексные числа

$$a + bi \text{ и } a - bi \quad (3)$$

суть сопряженные.

Сопряженные комплексные числа важны в том отношении, что их произведение есть неотрицательное число.

Чтобы убедиться, достаточно положить в формуле (III) произведения двух комплексных чисел $a' = a$ и $b' = -b$. Мы получаем очевидно:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0, \quad (4)$$

ибо коэффициент при i оказывается в этом случае нулем.

(2) *Абсолютная величина комплексного числа, или модуль*. Пусть $a + bi$ — какое-нибудь комплексное число. *Абсолютной величиной его, или модулем его*, называется неотрицательное число

$$\sqrt{a^2 + b^2},$$

где радикал *всегда* берется в арифметическом смысле, т. е. *неотрицательным*.

Абсолютная величина, или модуль, комплексного числа $a + bi$ обозначается символом $|a + bi|$, так что имеем:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (5)$$

где радикал арифметический.

Ясно, что модуль $|a + bi|$ равен нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и одновременно $b = 0$, так что написать $|a + bi| = 0$ — это означает написать $a = 0$ и $b = 0$, т. е. написать $a + bi = 0$. Таким образом, *модуль комплексного числа тогда и только тогда обращается в нуль, когда само комплексное число становится нулем.*

Заметим, наконец, что не напрасно и не случайно модуль комплексного числа $a + bi$ называется *абсолютной величиной комплексного числа* $a + bi$ и обозначается знаком $|a + bi|$, ибо когда $b = 0$, тогда комплексное число $a + bi$ становится действительным числом a , и тогда модуль $|a + bi|$ становится равным $\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, т. е. *равняется абсолютной величине действительного числа a .*

Таким образом, модуль $|a + bi|$ есть понятие более общее, чем абсолютная величина $|a|$ действительного числа a .

Деление комплексных чисел. Желая найти частное $\frac{a' + b'i}{a + bi}$ от деления двух комплексных чисел $a' + b'i$ и $a + bi$, мы умножаем числитель и знаменатель написанной дроби на комплексное число $a - bi$, *сопряженное знаменателю*. Заранее должны оговориться, что на нуль делить нельзя и что поэтому знаменатель $a + bi$ заранее предполагается отличным от нуля; это означает, что его модуль $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ есть число *существенно положительное*, т. е. не равное нулю.

Имеем выкладки:

$$\frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{(aa' + bb') + (ab' - a'b)i}{a^2 + b^2}.$$

Окончательно:

$$\frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} i. \quad (IV)$$

Формула (IV) показывает, что отношение двух комплексных чисел есть комплексное число, *если только знаменатель дроби не есть нуль*. Деление же на нуль невозможно так же, как и в случае действительных чисел.

Общее заключение из формул (I), (II), (III) и (IV): все четыре действия арифметики, проделанные над комплексными числами, дают в результате опять комплексное число, *могущее оказаться, в частном случае, и действительным.*

Из того, что во время выкладки позволено обращаться с мнимой единицей i как с действительным переменным, заменяя только всюду, по дороге и в окончательном результате, i^2 через -1 , следует, что все законы арифметики и алгебры распространяются

полностью на комплексные числа. В частности, произведение комплексных чисел $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \dots$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей является нулем.

Заметим наконец, что из формул (I), (II), (III) и (IV) вытекает важное следствие: если в сумме, разности, произведении и частном комплексных чисел заменить каждое комплексное число ему сопряженным, то результаты явятся также сопряженными.

Значит, в каждом соотношении между комплексными числами, состоящем только из комбинации четырех действий арифметики, всегда можно заменить i на $-i$.

§ 92. Геометрическое изображение комплексных величин. Мы знаем, что всякое действительное число a изобразимо в виде точки M , лежащей на прямой линии, и что, обратно,

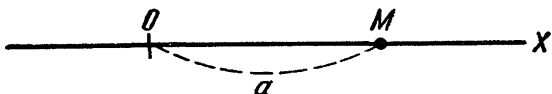


Рис. 76

всякая такая точка M изображает некоторое действительное число a , называемое абсциссой точки M (рис. 76). Абсцисса точки M есть отвлеченное действительное число, выражающее длину направленного отрезка OM , измеренного единицей масштаба.

Аналогично, всякое комплексное число $a + bi$ изобразимо в виде точки $M(a, b)$ плоскости, имеющей абсциссой и ординатой действительные числа a и b , и обратно: всякая точка M плоскости, имеющая абсциссой действительное число a и ординатой действительное число b , служит изображением комплексного числа $a + bi$ (рис. 77).

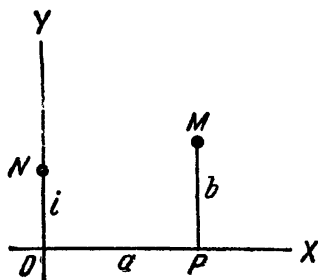


Рис. 77

По аналогии с предыдущим, это комплексное число $a + bi$ называется *аффиксом точки M* . Таким образом, всякое комплексное число $a + bi$ есть аффикс единственной вполне определенной точки M , лежащей на плоскости XOY , и всякая точка $M(a, b)$ этой плоскости имеет своим аффиксом комплексное число $a + bi$.

Если точка M лежит на горизонтальной координатной оси OX , то аффикс такой точки M есть действительное число a , потому что в этом случае $b = 0$. Поэтому ось абсцисс OX носит название *оси*

действительных чисел или сокращенно: действительная ось. Аналогично, когда точка M лежит на вертикальной координатной оси OY , аффикс такой точки M есть чисто мнимое число bi , потому что в этом случае $a=0$. Поэтому ось ординат OY носит название *оси мнимых чисел* или сокращенно (но неправильно): мнимая ось.

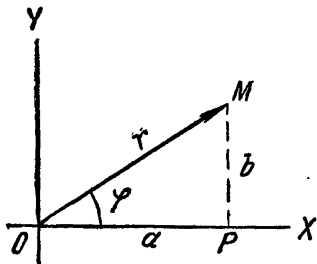


Рис. 78

Точка M оси ординат OY , находящаяся выше начала O и отстоящая от него на единицу масштаба 1, имеет своим аффиксом мнимую единицу i . Аффикс начала O есть *нуль*.

Если мы соединим точку M с началом O прямолинейным отрезком, то получим *вектор* OM , направленный из начала O в рассматриваемую точку M (рис. 78).

Этот вектор OM также хорошо может служить для геометрического изображения комплексного числа $a+bi$, как и его конец M .

Учащийся заметит, что и действительное число также, собственно, изображалось двумя способами: и *точкой* M (см. рис. 76), и *направленным отрезком* (т. е. вектором) OM . Если действительное число a было положительным, точка M находилась направо от начала O , и вектор OM , лежащий на оси OX , был направлен в положительную сторону оси абсцисс; если же число a было отрицательным, точка M находилась налево от начала O , и вектор OM , лежащий на оси OX , был направлен в отрицательную сторону.

Абсолютной величиной $|a|$ действительного числа a являлось расстояние точки M до начала O , оцениваемое всегда положительно, т. е. длина вектора OM .

В случае же комплексного числа $a+bi$ вектор OM уже не лежит на оси абсцисс OX , но направлен по плоскости. Его длину мы обозначим через r , а его наклон к положительной части оси OX обозначим через φ . Из прямоугольного треугольника OPM мы имеем известные *прямые* формулы преобразования прямоугольных координат a, b в полярные r, φ :

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi. \quad (6)$$

и *обратные* формулы перехода от полярных координат r, φ к прямоугольным a, b :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Так как функция $\arctg x$ есть многозначная, то надо условиться в оценке угла φ . Угол φ отсчитывается всегда в положительном направ-

лении (против стрелки часов), т. е. вращением положительной части оси OX до положения вектора OM . Если этот угол есть φ , то остальные значения будут: $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ и т. д., когда вектор OM проходится многократным непрерывным вращением положительной части оси OX против стрелки часов, и $\varphi - 2\pi$, $\varphi - 4\pi$ и т. д., когда вектор OM проходится многократно вращением положительной части оси OX по стрелке часов. Угол φ называется *аргументом* комплексного числа $a + bi$.

Что же касается длины r вектора OM , то первая из формул (7) показывает, что это есть *модуль* комплексного числа $a + bi$, т. е. имеем:

$$|a + bi| = r. \quad (8)$$

Равенство (8) не только замечательно тем, что в силу него модуль комплексного числа является естественным обобщением понятия абсолютной величины действительного числа, но еще и тем, что из него следует ряд теорем о модуле. Чтобы видеть это, укажем сначала *геометрический смысл четырех действий арифметики над комплексными числами*.

Сложение. По формуле (I) § 91 имеем:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i. \quad (I)$$

Нанесем на плоскости XOY комплексные слагаемые $a + bi$ и $a' + b'i$ в виде векторов OM и OM' . Координаты точки M суть a , b и координаты точки M' суть a' , b' (рис. 79).

Если мы с векторами OM и OM' будем обращаться так, как в механике обращаются с силами, т. е. будем складывать и вычитать векторы по правилу параллелограмма, то для того, чтобы найти сумму векторов OM и OM' , мы должны приставить к концу M первого вектора OM вектор MN , равный вектору OM' . Тогда вектор ON и есть *геометрическая сумма* векторов OM и OM' .

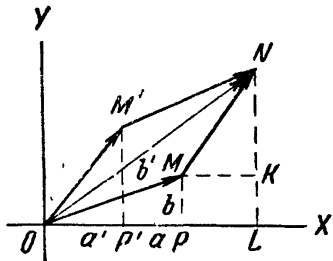


Рис. 79

Но ясно, что $OP' = MK = PL$, $PM = LK$ и $P'M' = KN$. Значит, $OL = a + a'$ и $LN = b + b'$. Следовательно, результирующий вектор ON , равный *диагонали* параллелограмма $OMNM'$, построенного на данных вектора OM и OM' , и является геометрическим образом суммы комплексных чисел.

Таким образом, чтобы иметь сумму двух комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$, изображенных в виде двух векторов, надо геометрически сложить эти векторы по закону параллелограмма.

и тогда его диагональ есть вектор, изображающий сумму $(a + bi) + (a' + b'i)$.

Ясно, что этот закон распространяется на суммы какого угодно конечного числа комплексных чисел:

$$(a + bi) + (a' + b'i) + (a'' + b''i) + (a''' + b'''i).$$

Если каждое слагаемое изобразить в виде вектора и приставить, последовательно, к концу каждого вектора начальную точку следующего, как показано на рисунке 80, то мы, приставив последний

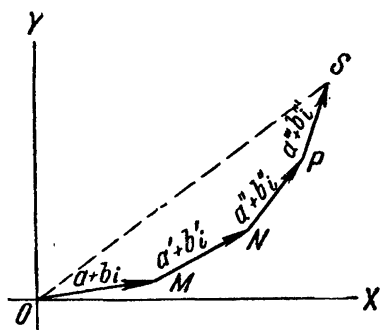


Рис. 80

вектор $a''' + b'''i$, придем к точке S , такой, что ее абсциссой и будет сумма данных комплексных чисел. В самом деле, результирующий вектор OS имеет, очевидно, проекцией на ось OX сумму $a + a' + a'' + a'''$ проекций данных векторов на эту ось и проекцией на ось OY сумму $b + b' + b'' + b'''$ их проекций на OY .

А так как прямолинейный путь OS , очевидно, короче ломаного пути OM, MN, NP, PS , составленного из прямолинейных звеньев OM, MN, NP, PS , то

модуль суммы комплексных чисел меньше суммы их модулей.

Если, следовательно, данные комплексные числа суть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, то имеем неравенство:

$$|\alpha + \beta + \gamma + \delta| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta|. \quad (9)$$

причем равенство осуществляется лишь тогда, когда векторы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежат на одной прямой, проходящей через начало O , и когда они направлены все в одну сторону, ибо тогда отрезок OS равен сумме отрезков OM, MN, NP, PS .

Формула (9) еще раз показывает, что модуль $|a + bi|$ комплексного числа $a + bi$ и абсолютная величина $|a|$ действительного числа a подчинены одним и тем же законам.

Вычитание. Пусть $\alpha = a + bi$ и $\alpha' = a' + b'i$. Согласно формуле (II) § 91, мы имеем:

$$\alpha - \alpha' = (a - a') + (b - b')i.$$

Если комплексное число α изображено вектором OM (рис. 81) и число α' — вектором OM' , то координаты точки M суть a, b и координаты точки M' суть a', b' . Тогда ясно, что $P'P = a - a'$

и $KM = b - b'$. Значит, замыкающий вектор $M'M$ и есть вектор, изображающий комплексное число $(a - a') + (b - b')i$.

Таким образом: разность $\alpha - \alpha'$ двух комплексных чисел α и α' изображается в виде вектора, имеющего начальной точкой конец вычитаемого α' и конечной точкой конец уменьшаемого α .

Так как в треугольнике $OM'M$ сторона $M'M$ имеет длину большую, чем разность длин двух других его сторон, то отсюда заключаем, что

$$|\alpha - \alpha'| \geq |\alpha| - |\alpha'|, \quad (10)$$

или

модуль разности двух комплексных чисел не меньше разности их модулей.

Равенство возможно лишь тогда, когда векторы α и α' лежат на одной прямой, проходящей через O , и направлены в одну сторону.

Формула (10) аналогична формуле $|\alpha - \alpha'| \geq |\alpha| - |\alpha'|$ для абсолютных величин $|\alpha|$, $|\alpha'|$ двух действительных чисел α и α' .

Для оставшихся двух действий: умножения и деления, необходимо рассмотреть сначала тригонометрическую форму комплексных чисел.

Пусть комплексное число $\alpha = a + bi$ имеет r своим модулем и φ своим аргументом. Из формул

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi \quad (6)$$

мы получаем:

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (11)$$

Это и есть тригонометрическая функция комплексного числа. Умножение. Пусть

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{и} \quad \alpha' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

Составим произведение:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' &= rr'(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \\ &= rr'[(\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') + i(\cos \varphi \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \varphi')]. \end{aligned}$$

Значит,

$$\alpha\alpha' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]. \quad (12)$$

Из формулы этой следует, что rr' является модулем произведения $\alpha\alpha'$, а $\varphi + \varphi'$ его аргументом.

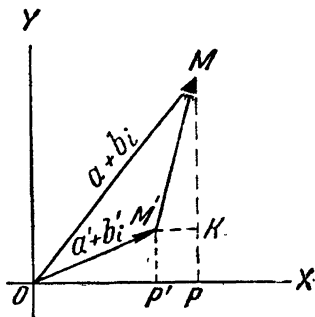


Рис. 81

Таким образом, мы заключаем:

модуль произведения двух комплексных чисел α и α' равен произведению их модулей:

$$|\alpha\alpha'| = |\alpha| \cdot |\alpha'| \quad (13)$$

и

аргумент произведения двух комплексных чисел α и α' равен сумме их аргументов:

$$\arg \alpha\alpha' = \arg \alpha + \arg \alpha', \quad (14)$$

где знаком $\arg(a + bi)$ обозначается аргумент комплексного числа $a + bi$, т. е., согласно второй формуле (7), $\arctg \frac{b}{a}$.

Формулы (13) и (14) распространяются на произведение не только двух, но и трех, четырех и т. д. комплексных чисел. В самом деле:

$$|\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''| = |\alpha| \cdot |\alpha'\alpha''\alpha'''| = |\alpha| \cdot |\alpha'| \cdot |\alpha''\alpha'''| = |\alpha| \cdot |\alpha'| \cdot |\alpha''| \cdot |\alpha'''|$$

и

$$\begin{aligned} \arg(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') &= \arg \alpha + \arg(\alpha'\alpha''\alpha''') = \arg \alpha + \arg \alpha' + \arg(\alpha''\alpha''') = \\ &= \arg \alpha + \arg \alpha' + \arg \alpha'' + \arg \alpha'''. \end{aligned}$$

В частности, если все множители равны между собой, мы имеем:

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n$$

и

$$\arg(\alpha^n) = n \arg \alpha.$$

Следовательно, если $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то имеем так называемую *формулу Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (15)$$

Формула (15) дает правило возвышения комплексного числа в целую положительную степень.

Чтобы получить правило извлечения корня $\sqrt[n]{\alpha}$ из данного комплексного числа α (неравного нулю), где показатель n есть целый положительный, мы пишем равенство $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$, где комплексное число $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ нам дано, а комплексное число $\beta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ ищется. Возводя в n -ю степень обе части равенства $\beta = \sqrt[n]{\alpha}$, мы находим $\beta^n = \alpha$, и, по формуле Муавра,

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (16)$$

Отсюда следует, что $r' = r\rho$ и $\varphi' - \varphi - \theta =$ целому числу окружностей $= 2\pi k$, где k — целое число.

Решая эти уравнения относительно неизвестных ρ и θ , мы находим окончательно:

$$\rho = \frac{r'}{r} \quad \text{и} \quad \theta = \varphi' - \varphi.$$

Таким образом, мы заключаем:

модуль частного двух комплексных чисел α' и α равен частному их модулей:

$$\left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \frac{|\alpha'|}{|\alpha|} \quad (21)$$

и

аргумент частного двух комплексных чисел α' и α равен разности их аргументов:

$$\arg\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \arg \alpha' - \arg \alpha. \quad (22)$$

Учащийся замечает, что аргументы $\arg \alpha$, $\arg \alpha'$, ... комплексных чисел ведут себя как логарифмы: складываются при умножении и вычитаются при делении комплексных чисел.

§ 93. Комплексное переменное. Комплексная величина называется *переменной*, если она изменяет, с течением времени, свое численное значение. Обычно комплексную переменную величину обозначают буквой z , причем пишут

$$z = x + iy, \quad (1)$$

где x и y суть действительные переменные величины.

Комплексная переменная величина z *геометрически изображается движущейся по плоскости точкой M* , аффикс которой $z = \bar{x} + iy$ изменяет, с течением времени, свое значение, вследствие чего

точка M изменяет свое положение, т. е. *движется по плоскости*, описывая тот или иной путь (рис. 83).

Так как, с одной стороны, теория пределов для действительных переменных величин вся построена на неравенстве

$$|a - x| < \varepsilon, \quad (2)$$

где a есть *предел* переменной величины x , и так как, с другой стороны, для комплексных чисел модуль подчинен тем же самым

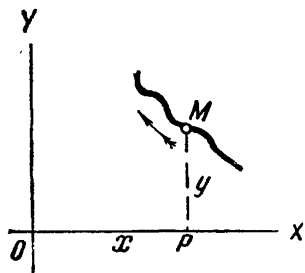


Рис. 83

правилам, которым подчинена абсолютная величина для действительных чисел, то вся теория пределов строится для комплексных чисел точно таким же образом, каким она строилась выше для действительных чисел.

Более того, ее даже строить не нужно, ибо *все правила и теоремы теории пределов переносятся без изменения на комплексные числа.*

Таким образом,

комплексное число α есть предел комплексной переменной величины z , если для любого заданного положительного числа ε наступит такой момент времени, начиная с которого удовлетворится и будет всегда впредь оставаться удовлетворенным неравенство

$$|\alpha - z| < \varepsilon. \quad (2^*)$$

Геометрически это означает, что движущаяся по плоскости XOY точка M , имеющая своим аффиксом комплексную переменную величину z , настолько с течением времени приблизится к неподвижной точке A , которая имеет своим аффиксом постоянное комплексное число α , что попадет в надлежащий момент времени внутрь круга C

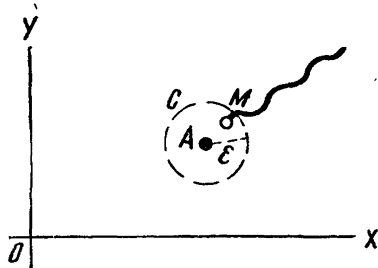


Рис. 84

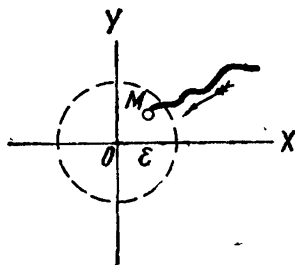


Рис. 85

радиуса ε , описанного из точки A как из центра, и будет впредь всегда оставаться в нем, никогда не выходя из него. Число же ε , служащее радиусом, может быть назначено сколь угодно малым (рис. 84).

Следует помнить, что расстояние AM точек A и M есть не что иное, как модуль разности $|\alpha - z|$.

Все теоремы теории пределов сохраняются и для комплексных переменных, в частности и понятие *бесконечно малой комплексной величины* z , как такой, для которой имеем неравенство

$$|z| < \varepsilon, \quad (3)$$

остающееся с некоторого момента всегда удовлетворенным. Значит, если z есть комплексная бесконечно малая величина, точка $M(z)$,

имеющая аффиксом z , с течением времени настолько приблизится к началу O , что будет всегда оставаться в круге C радиуса ε и центра O (рис. 85).

Приходится лишь добавить несколько слов о *комплексных бесконечно больших величинах*.

Комплексная переменная величина z называется *бесконечно большой*, когда для нее с некоторого момента будет соблюдаться неравенство

$$|z| > R, \quad (4)$$

где R — любое большое положительное число, заранее указанное.

Геометрически это означает, что точка $M(z)$ движется так, что с течением времени будет оставаться всегда *вне* круга C центра O и любого большого радиуса R , заранее заданного (рис. 86).

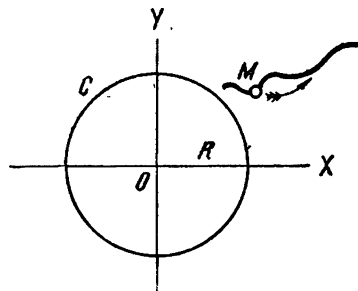


Рис. 86

В действительном переменном мы различали $+\infty$ от $-\infty$. В комплексном переменном такого различия делать не нужно, и если точка $M(z)$ удаляется в бесконечность по какому-нибудь пути, мы пишем

$$z \rightarrow \infty \text{ и } \lim z = \infty,$$

не задавая себе вопроса о том, какого рода эта бесконечность. *Следовательно, в комплексном переменном все бесконечности объединяются*

в одну бесконечно удаленную точку, потому что в плоскости комплексного переменного считают, что имеется только одна бесконечно удаленная точка, которой мы и достигаем, безгранично уходя от начала O по *любому* пути. Поэтому, в комплексном переменном, плоскость XOY рассматривают как *сферу* бесконечно большого радиуса, на которой точкой, диаметрально противоположной началу O , служит точка ∞ . Переменная величина $\frac{1}{z}$ удаляется в ∞ , когда z приближается к началу O , т. е. имеем:

$$\frac{1}{z} \rightarrow \infty, \text{ когда } z \rightarrow 0.$$

Таким образом, в комплексном переменном ∞ рассматривается как *одна точка*, и считают, что в нее переходит начало O , когда мы берем преобразование $z^* = \frac{1}{z}$, заставляющее переходить вообще какую-нибудь точку z в точку z^* , и обратно.

Отметим, наконец, что равенство $\lim z = \alpha$, где $z = x + yi$ и $\alpha = a + bi$, равносильно двум одновременным действительным равенствам: $\lim x = a$ и $\lim y = b$.

§ 94. Перенос теории численных рядов на комплексные числа. Основанная только на пределах теория численных рядов без изменения переносится на комплексные числа. Только вместо промежутка сходимости $-1 < x < +1$ геометрической прогрессии $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ приходится говорить о *круге сходимости* $|z| < 1$ прогрессии $1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$, где z есть комплексное число: она сходится внутри круга C радиуса 1 и центра O и расходится всюду на его периферии и за нею (рис. 87).

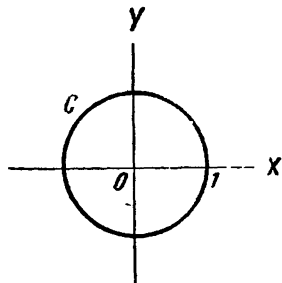


Рис. 87

Далее, признак Д'Аламбера имеет силу для рядов $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ с комплексными членами u_n : если имеем

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$, то ряд *сходится*, когда $\rho < 1$, *расходится* при $\rho > 1$ и представляет неопределенность при $\rho = 1$.

Наконец, ряд с комплексными членами $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится, если сходится ряд модулей его членов $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$. Такие ряды $u_1 + u_2 + \dots$ по-прежнему называются *абсолютно сходящимися*. Их свойства остаются прежними.

§ 95. Понятие функции комплексного переменного. Когда имеем две переменные комплексные величины $w = u + iv$ и $z = x + iy$, связанные между собой тем условием, что при постоянстве z сохраняет постоянное значение и w , а при изменении z изменяется и w , тогда переменную величину w называют *зависимой переменной* или *функцией от z* и пишут

$$w = f(z). \quad (1)$$

Переменное z в этом случае называется *независимым переменным*.

Функции $y = f(x)$ действительного переменного задаются обычно: *или* на всей оси OX , *или* на отрезке, *или* в промежутке. Аналогично, функции $w = f(z)$ комплексного переменного задаются: *или* на всей плоскости комплексного переменного, *или* внутри какой-нибудь замкнутой линии C , включая контур, *или* только внутри C , самый контур исключается при этом (рис. 88).

Обычно кривые берутся имеющими непрерывно перемещающуюся по ним касательную прямую (так называемые «гладкие кривые») или контуры, состоящие из конечного числа гладких дуг («криволинейные многоугольники»).

В комплексном переменном нельзя упускать из вида того важного обстоятельства, что мы не можем здесь иметь цельного геометрического образа функции $w = f(z)$, но нам доступны лишь *его разрозненные части*. Причина этого заключается

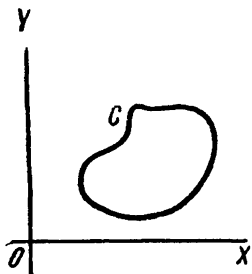


Рис. 88

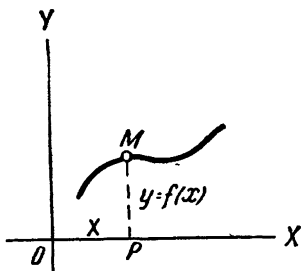


Рис. 89

в следующем: в действительном переменном цельным геометрическим образом функции $y = f(x)$ является *кривая линия* $y = f(x)$, начерченная на плоскости XOY (рис. 89). Она служит объединяющим синтезом *представления* двух разрозненных осей OX и OY (рис. 90), по которым движутся точки $M(x)$ и $N(y)$, когда изменяется независимое переменное x и когда вследствие уравнения $y = f(x)$

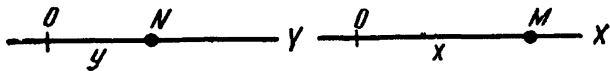


Рис. 90

должно изменяться и зависимое переменное y . Объединяя эти две разрозненные оси в имеющемся у нас представлении плоскости, мы получаем цельный образ *кривой* (рис. 89), уже совершенно не зависящий от времени и вполне характеризующий данную функцию $y = f(x)$.

В комплексном же переменном, хотя и имеем дело с *одной* функцией $w = f(z)$, но здесь у нас уже *четыре* действительные переменные, ибо мы имеем $w = u + iv$ и $z = x + iy$. Поэтому для геометрического изображения нам нужны *четыре* действительные оси OX , OY , OU и OV , т. е. *необходимо пространство четырех измерений*. А так как мы не имеем непосредственного представления такого пространства, то нам недоступен и синтез четырех указанных осей, и, значит, мы не имеем геометрического цельного образа функции $w = f(z)$ комплексного переменного. Вместо этого нам приходится довольствоваться двумя разрозненными плоскостями XOY и UOV ,

причем на первой из них изображается изменение независимого переменного z , а на второй — изменение зависимого переменного w (рис. 91).

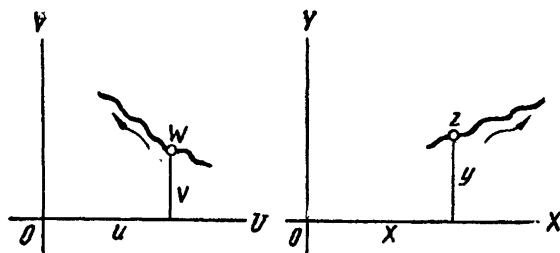


Рис. 91

§ 96. Непрерывность функции комплексного переменного. Непрерывность эта определяется таким же образом, как и в действительном переменном. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если будет удовлетворено неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad (\text{I})$$

всякий раз, как удовлетворяется неравенство

$$|z - z_0| < \eta, \quad (\text{II})$$

где положительное ε произвольно задается, а положительное η надлежащим образом подбирается для заданного ε .

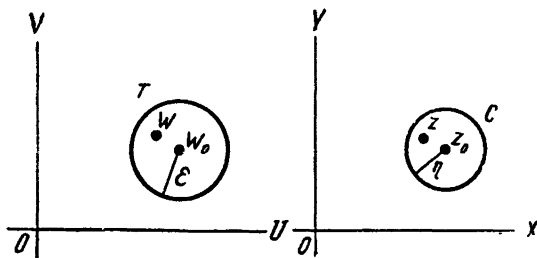


Рис. 92

Геометрически это означает, что точка w , где $w = f(z)$, плоскости зависимого переменного остается в круге G радиуса ε , описанном из неподвижной точки w_0 , $w_0 = f(z_0)$, как из центра, когда точка z остается в круге C радиуса η , описанном из точки z_0 как из центра (рис. 92).

Приращение Δw функции $w = f(z)$ определяется так же, как и раньше, т. е. равенством

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad (I)$$

где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ есть приращение независимого переменного z , а $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ есть приращение функции.

Геометрически, приращение Δz есть вектор, исходящий из точки z и кончающийся в (близкой) точке $z + \Delta z$ (рис. 93). Непрерывность функции $f(z)$ в точке z означает, что приращение функции $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ делается бесконечно малым, когда

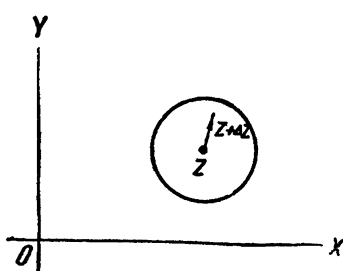


Рис. 93

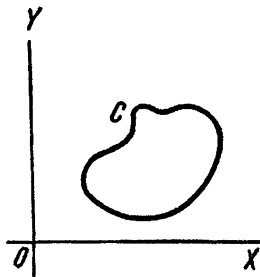


Рис. 94

приращение Δz независимого переменного z бесконечно мало, ибо неравенство (I) переписывается в виде

$$|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon, \quad (I^*)$$

а неравенство (II) переписывается в виде

$$|\Delta z| < \eta, \quad (II^*)$$

когда мы пишем начальную точку z_0 просто в виде z , а близкую к z_0 точку z в виде $z + \Delta z$.

Все теоремы о непрерывности, поэтому, остаются в силе, в частности, теоремы о равномерно сходящихся рядах непрерывных функций $u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots$, а именно: если этот ряд составлен из функций комплексного переменного z , непрерывных внутри замкнутого контура C (рис. 94), включая его периферию, и если этот ряд равномерно сходится внутри C , со включением самого контура C , тогда сумма $f(z)$ этого ряда есть непрерывная функция внутри C со включением самого C .

§ 97. Производная и моногенность. Определение производной функции комплексного переменного остается прежним.

Мы говорим, что функция $w = f(z)$ комплексного переменного z имеет производную в точке z , если отношение

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

стремится к вполне определенному единственному пределу, когда приращение Δz независимого переменного стремится к нулю независимо от того пути, по которому Δz приближается к нулю.

Когда функция $f(z)$ имеет производную в какой-нибудь точке z_0 , тогда функцию $f(z)$ называют **моногенной** в точке z_0 , а саму производную продолжают обозначать обычным образом через $f'(z_0)$. Таким образом, если рассматриваемая функция монотенна в точке z , мы пишем:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \quad (I)$$

Ясно, что монотенная функция в точке z автоматически является непрерывной в этой точке, ибо написанное в числителе приращение $f(z + \Delta z) - f(z)$ функции обязано быть бесконечно малым, когда $\Delta z \rightarrow 0$.

Функция $f(z)$, монотенная в каждой точке z , лежащей внутри замкнутого контура C , называется **монотенной внутри C** .

§ 98. Сохранение формул дифференциального исчисления. Все теоремы о дифференцировании функций и, что важнее всего, все *формулы* дифференцирования алгебраических выражений (часть I, гл. VII, § 57) остаются в полной сохранности, будучи перенесенными на функции комплексного переменного. В частности, остаются в прежней силе формулы производной суммы, разности, произведения, частного, функции от функции и обратной функции. По-прежнему производная постоянной равна нулю и производная независимого переменного z по нему самому равна 1.

Отсюда вытекают сразу же весьма важные следствия.

1. Всякий многочлен $P(z)$, $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, есть монотенная функция в каждой конечной точке z плоскости.

2. Всякая рациональная функция $\frac{P(z)}{Q(z)}$,

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad Q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m,$$

есть монотенная функция всюду, кроме корней уравнения $Q(z) = 0$, в которых монотенности может и не быть.

3. Всякая алгебраическая функция $w(z)$, определенная уравнением $P(z, w) = 0$, есть монотенная всюду, кроме конечного числа точек. Здесь $P(z, w)$ — многочлен от z и w .

Таким образом, имеется бесчисленное множество монотенных функций от z , но все они алгебраические. Чтобы иметь *трансцендентную* монотенную функцию, необходимо рассмотрение степенных рядов.

§ 99. Степенные ряды. Коэффициенты степенного ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (1)$$

суть, вообще, комплексные числа и z — комплексное переменное.

Для степенных рядов с комплексным независимым переменным z сохраняется доказательство теоремы Абеля (§ 80), которая поэтому получает такую формулировку:

если степенной ряд (1) сходится в какой-либо точке z_0 , то он будет сходящимся с силой геометрической прогрессии внутри всякого круга, имеющего своим центром O , а радиусом $|z_0| - \varepsilon$, где ε сколь угодно малая фиксированная величина. Если же степенной ряд (1) расходится в точке z_0 , он будет расходящимся всюду вне круга $|z| \leq |z_0|$, ибо его члены вне этого круга не могут стремиться к нулю (рис. 95).

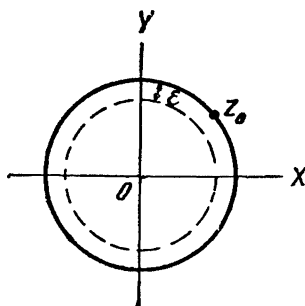


Рис. 95

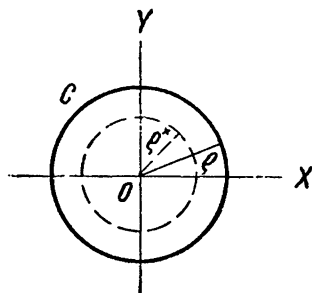


Рис. 96

Из этой теоремы вытекает как следствие:

для всякого степенного ряда (1) имеется такой круг C центра O и радиуса ρ , что внутри него степенной ряд будет всюду сходящимся, а вне его всюду расходящимся.

Этот круг C называется *кругом сходимости* степенного ряда (1).

На самой окружности сходимости C поведение степенного ряда не определено, ибо она (окружность) может содержать как точки сходимости, так и точки расходимости.

Из того факта, что степенной ряд (1) равномерно сходится и на периферии всякого круга C^* , concentрического кругу сходимости C и радиуса ρ^* (рис. 96), меньшего, чем радиус сходимости ρ , следует *непрерывность суммы $f(z)$ степенного ряда:*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (2)$$

внутри круга сходимости C .

Но гораздо более важной является *первая (прямая) теорема Коши*. Сумма $f(z)$ степенного ряда монотонна всюду внутри круга сходимости S этого степенного ряда.

Доказательство. Пусть степенной ряд (2) имеет радиус сходимости ρ , $\rho > 0$. Круг сходимости S ряда (2) имеет центром O и радиусом ρ (рис. 97). Пусть z есть какая-нибудь фиксированная точка внутри этого круга. Тогда очевидно, что имеем $|z| < \rho$. Обозначив модуль комплексного числа z через r , $|z| = r$, мы получим $r < \rho$. Поэтому к числу r можно прибавить столь малое положительное δ , $\delta > 0$, чтобы мы продолжали иметь неравенство $r + \delta < \rho$. Так как точки r и $r + \delta$ находятся внутри круга сходимости S , то ряды с положительными членами

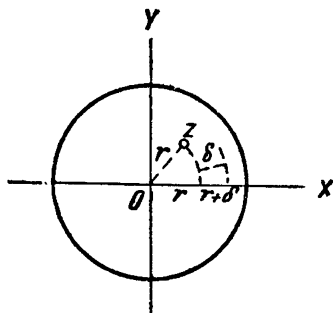


Рис. 97

сходятся. Вычитая из второго ряда первый, мы имеем сходящийся ряд с положительными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot (r + \delta)^n$$

сходятся. Вычитая из второго ряда первый, мы имеем сходящийся ряд с положительными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{(r + \delta)^n - r^n}{1},$$

Разделив на наше фиксированное положительное δ , мы имеем по-прежнему сходящийся ряд с положительными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{(r + \delta)^n - r^n}{\delta},$$

который можно переписать в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \left\{ nr^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} \delta + \dots + \delta^{n-1} \right\}. \quad (3)$$

Если мы теперь составим выражение $\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, то оно напишется в виде сходящегося ряда:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z},$$

который можно переписать в виде:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ n z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^{n-2} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1} \right\}. \quad (4)$$

Сравнивая ряды (3) и (4), мы замечаем, что, в силу равенства $|z| = r$ и когда Δz , стремясь к нулю, удовлетворит неравенству $|\Delta z| < \delta$, ряд (4) есть правильно сходящийся при фиксированном z и при Δz , стремящемся к нулю. В самом деле, при $|\Delta z| < \delta$ ряд (4) имеет своей мажорантой численный ряд (3) с положительными *неизменяющимися* членами. Поэтому ряд (4) есть равномерно сходящийся, когда $\Delta z \rightarrow 0$, и изображает *непрерывную функцию от приращения Δz* , имеющую предельной величиной при $\Delta z \rightarrow 0$ сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot z^{n-1}.$$

Поэтому, заставляя Δz стремиться к нулю *по любому пути*, мы видим, что сумма ряда (4), т. е. отношение $\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, стремится к вполне определенному пределу, каковым является сумма абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Следовательно, $f(z)$ есть *моногенная функция* в точке z , и при этом мы имеем равенство

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad (5)$$

говорящее о моногенности сумм степенных рядов в круге их сходимости и о возможности их там *почленно дифференцировать*.

Ч. т. д.

Эта важная теорема Коши служит источником образования бесчисленного множества новых и новых моногенных функций¹.

¹ Получать моногенные функции вовсе не столь просто и легко, как это кажется на первый взгляд. Начав образовывать какую-нибудь функцию $f(z)$ *не оперативным способом* над самим независимым переменным z , а при помощи специальных условий и соглашений [как это обычно делают, определяя функции действительного переменного $f(x)$], мы чаще всего попадаем на *немоногенные функции*. Например, переменная величина $w = x - iy$ есть, очевидно, непрерывная функция комплексного переменного $z = x + iy$, но она *немоногенна ни в какой точке z* . Чтобы получить *моногенную функцию*, должны быть соблюдены многие условия. Поэтому-то первая (прямая) теорема Коши и имеет такую важность, являясь надежным способом получать *только моногенные функции*.

Но еще более важное значение имеет *вторая (обратная) теорема Коши*, смысл которой тот, что этим способом можно получить все моногенные функции, не пропустив ни одной из них.

Точная формулировка этой важнейшей из всех теорем следующая.

Вторая (обратная) теорема Коши. *Всякая функция $f(z)$, моногенная в каждой точке z , лежащей внутри круга Γ радиуса R с центром $z=0$, есть сумма степенного ряда $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$, заведомо сходящегося внутри круга Γ (рис. 98).*

Эта теорема — одна из самых важных в математическом анализе и ее следствия — неисчислимы. Но самое доказательство этой теоремы в настоящее время еще не упрощено в такой мере, чтобы его

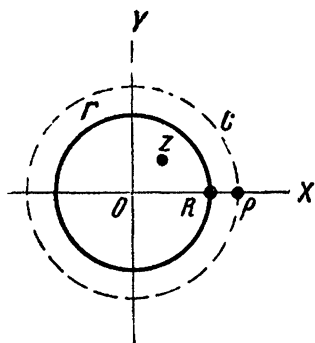


Рис. 98

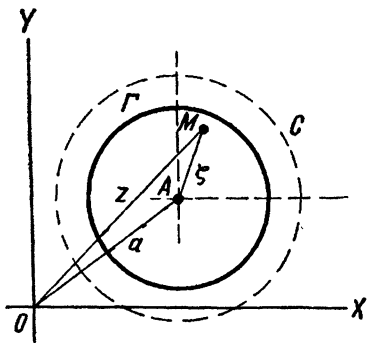


Рис. 99

можно было изложить в нашей книге. Поэтому мы ограничиваемся здесь доказательствами лишь непосредственных ее следствий.

Следствие I. *Имеется тождество между, с одной стороны, функциями $f(z)$, моногенными внутри круга Γ с центром $z=a$ и радиусом R , и, с другой стороны, функциями, разложимыми в сходящиеся в этом круге степенные ряды*

$$b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + b_n(z-a)^n + \dots$$

Доказательство. Степенной ряд

$$b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \quad (6)$$

получает вид ряда:

$$b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_n \zeta^n + \dots, \quad (7)$$

когда делаем замену переменного z переменным ζ посредством формулы $z-a=\zeta$ (рис. 99). Эта формула показывает, что переменный

вектор OM есть сумма постоянного вектора OA и переменного вектора AM , причем аффиксом точки M служит z и аффиксом точки A — постоянное комплексное число a . Поэтому новое комплексное переменное ζ изображается вектором AM . Так как степенной ряд (7) имеет определенный круг сходимости S радиуса ρ и центра A , то *первоначальный степенной ряд (6) сходится внутри S и расходится снаружи S* . Радиус ρ есть радиус сходимости ряда (6).

В силу *первой (прямой) теоремы Коши*, сумма $\Phi(\zeta)$ степенного ряда (7):

$$\Phi(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots + b_n\zeta^n + \dots \quad (7^*)$$

есть моногенная функция относительно ζ внутри круга сходимости S , как имеющая комплексную производную по ζ , $\Phi'(\zeta) = \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta}$. Переходом на старое комплексное переменное $\zeta = z - a$ мы получаем функцию $f(z) = \Phi(z - a)$ комплексного переменного z , являющуюся суммой степенного ряда (6):

$$\begin{aligned} f(z) &= \Phi(z - a) = \\ &= b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots + b_n(z - a)^n + \dots \end{aligned} \quad (6^*)$$

внутри круга сходимости S . И так как по теореме дифференцирования функции от функции мы имеем:

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \Phi'(\zeta) \cdot 1 = \Phi'(z - a),$$

то отсюда мы заключаем, что $f(z)$ моногенна по z внутри круга сходимости S .

Мы доказали прямое предложение, а именно: если функция $f(z)$ служит суммой степенного ряда (6) внутри его круга сходимости S , то тогда $f(z)$ есть моногенная функция по букве z внутри этого круга S .

Докажем теперь обратное предложение: если функция $f(z)$, данная нам каким-нибудь способом, оказалась моногенной относительно z внутри некоторого круга Γ радиуса R и центра $z = a$, то тогда такая функция $f(z)$ служит суммой степенного ряда (6), наверное сходящегося внутри Γ , а может быть еще и вне его, т. е. в круге сходимости S большего радиуса ρ , $\rho > R$.

В самом деле, если $f(z)$ моногенна относительно z внутри Γ , то, полагая $z = a + \zeta$, получим функцию $f(a + \zeta)$, моногенную в круге радиуса R и центра $\zeta = 0$. Отсюда, применив *вторую*

(обратную) теорему Коши, мы видим, что $f(a + \zeta)$ есть сумма степенного ряда (7)

$$b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots + b_n\zeta^n + \dots, \quad (7)$$

наверное сходящегося внутри круга радиуса R и центра $\zeta = 0$. Значит, имеем равенство:

$$f(a + \zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots + b_n\zeta^n + \dots \quad (7^{**})$$

Делая в нем $\zeta = z - a$, мы получаем равенство:

$$f(z) = b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots + b_n(z - a)^n + \dots, \quad (6^*)$$

которое мы и хотели иметь.

Заметим, что круг сходимости S ряда (6*) не обязан быть тождественным с кругом Γ , но может быть и много больше его.

Примечание. Функции, являющиеся суммами степенных рядов

$$b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \dots + b_n(z - a)^n + \dots$$

в их кругах сходимости, называют **аналитическими функциями**. Таким образом, следствие 1 говорит о тождественности понятий *моногенная* функция и *аналитическая* функция внутри какого-нибудь круга.

Следствие 2. *Моногенная функция $f(z)$ внутри какого-нибудь замкнутого контура K есть безгранично дифференцируемая функция всюду внутри K .*

Доказательство. В первой (прямой) теореме Коши было доказано, что всякий степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots,$$

имеющий кругом сходимости круг S радиуса ρ и центра $z = 0$, имеет свою сумму $f(z)$ моногенной внутри S , причем ее производная $f'(z)$ равна сумме почленно продифференцированного первоначального ряда, т. е. имеем равенство:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1} + \dots \quad (8)$$

Таким образом, продифференцированный ряд (8) наверное сходится внутри круга S и имеет своей суммой $f'(z)$. А так как ряд (8) есть степенной и сходящийся внутри S , то к нему полностью применимо все только что сказанное. Это означает, что первая производная $f'(z)$ есть функция, *моногенная* внутри S , и что ее производная $f''(z)$ получается почленным дифференцированием ряда (8), т. е.

$$f''(z) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3z + \dots + n(n-1)a_nz^{n-2} + \dots, \quad (9)$$

причем этот ряд наверное сходится внутри S .

Повторяя еще раз сделанное рассуждение, мы убеждаемся, что $f''(z)$ монотонна внутри C и что ее производная $f'''(z)$ получается почленным дифференцированием ряда (9), что дает

$$f'''(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n z^{n-3} + \dots, \quad (10)$$

причем этот степенной ряд опять сходится внутри круга C , и так далее безгранично.

Таким образом, сумма $f(z)$ степенного ряда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

безгранично дифференцируема внутри его круга сходимости.

Отсюда сразу же вытекает, что сумма $f(z)$ более общего степенного ряда

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + b_n(z-a)^n + \dots \quad (11)$$

безгранично дифференцируема внутри его круга сходимости C , ибо, при помощи подстановки $z = a + \zeta$, мы преобразуем предыдущее равенство в

$$f(a + \zeta) = b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_n \zeta^n + \dots$$

которое показывает, что функция $f(a + \zeta)$ безгранично дифференцируема по ζ внутри круга сходимости C . И так как имеем, очевидно,

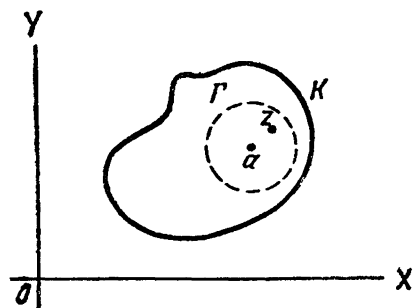


Рис. 100

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= \frac{df(a + \zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \\ &= \frac{df(a + \zeta)}{d\zeta}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{d^2 f(a + \zeta)}{d\zeta^2},$$

$$\frac{d^3 f(z)}{dz^3} = \frac{d^3 f(a + \zeta)}{d\zeta^3}, \dots \text{ и т. д.,}$$

то аналитическая функция $f(z)$ безгранично дифференцируема по z внутри круга сходимости C ее степенного ряда (11).

Пусть теперь $f(z)$ — монотонная функция внутри некоторого замкнутого контура K . Пусть z — какая-нибудь точка, лежащая внутри K . Ее всегда можно покрыть некоторым кружком Γ , лежащим целиком внутри K и имеющим центром постоянную точку a (рис. 100). Так как $f(z)$ монотонна внутри круга Γ , то она есть аналитическая внутри Γ и, значит, имеет все производные $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... в точке z . А это и доказывает безграничную дифференцируемость данной функции $f(z)$ в точке z .

§ 100. Ряд Тейлора и его круг сходимости. Если имеем степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (1)$$

сходящийся в круге Γ радиуса R и центра $z=0$, то из равенства (1) и из формул (8), (9), (10) предыдущего § следует, что $f(0) = a_0$, $f'(0) = 1 \cdot a_1$, $f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot a_2$, $f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3$, ... и вообще

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Из этого равенства следует формула Маклорена

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (2)$$

и, следовательно, *степенной ряд (1) есть ряд Маклорена:*

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots \quad (1)$$

Следовательно, ..

моногенная функция $f(z)$ в круге Γ радиуса R и центра O разлагается в степенной ряд единственным образом, ибо его коэффициенты определяются по формулам Маклорена, т. е. через величину функции $f(z)$ и всех ее производных $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, ... в одной только точке $z=0$. Этот ряд Маклорена заведомо будет сходящимся в круге Γ , а может быть, в концентрическом круге еще большего радиуса.

Возьмем теперь функцию $f(z)$, моногенную в каком-нибудь круге Γ радиуса R и центра $z=a$. Мы уже знаем, что такая функция $f(z)$ разложима в более общий степенной ряд:

$$f(z) = b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots + b_n(z-a)^n + \dots, \quad (3)$$

заведомо сходящийся в этом круге Γ . Делая преобразование переменного z по формуле $z = a + \zeta$, мы превращаем общий ряд (3) в обычный степенной ряд:

$$\Phi(\zeta) = f(a + \zeta) = b_0 + b_1 \zeta + b_2 \zeta^2 + \dots + b_n \zeta^n + \dots, \quad (4)$$

сходящийся в круге радиуса R и центра $\zeta=0$ и являющийся, как мы видели, рядом Маклорена для функции $\Phi(\zeta)$. Это означает, что его коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 , ... определяются по формулам Маклорена.

$$b_0 = \Phi(0), \quad b_1 = \frac{\Phi'(0)}{1!}, \quad b_2 = \frac{\Phi''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}, \quad \dots$$

Но так как имеем, очевидно,

$$\Phi'(\zeta) = f'(a + \zeta) = f'(z), \quad \Phi''(\zeta) = f''(z), \quad \dots, \quad \Phi^{(n)}(\zeta) = f^{(n)}(z), \quad \dots,$$

то, полагая $\zeta = 0$, имеем $z = a$ и

$$\Phi^{(n)}(0) = f^{(n)}(a). \quad (5)$$

Поэтому имеем для определения коэффициента b_n формулу Тейлора

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

и, следовательно, *общий степенной ряд (3) есть не что иное, как ряд Тейлора:*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots, \quad (II)$$

заведомо сходящийся внутри круга Γ радиуса R и центра a к заданной функции $f(z)$, монотонной внутри Γ .

Теперь спрашивается: *каков круг сходимости S ряда Тейлора (II)?*

Если данная функция $f(z)$ монотонна всюду внутри замкнутого контура K , то круг Γ можно увеличить до размера круга Γ' , еще находящегося внутри контура (рис. 101) K , но уже прикасающегося изнутри к контуру K . Сходимость ряда Тейлора (II) внутри такого круга Γ' гарантируется предположенной монотонностью функции $f(z)$ внутри Γ' . Дальнейшее увеличение круга Γ' может не состояться, если функция $f(z)$ не допускает монотонного расширения за ближайшей к кругу Γ' частью контура K . Но чаще всего круг сходимости S *больше* круга Γ' (рис. 101). В этом случае функция $f(z)$, рассматриваемая раньше только внутри контура K , допускает монотонное

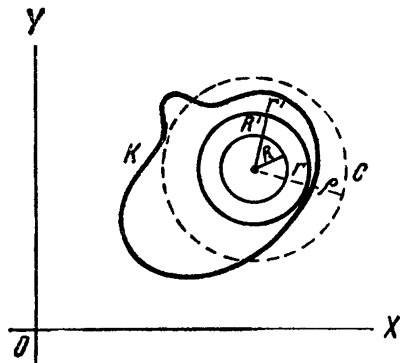


Рис. 101

расширение так, что прежняя часть функции $f(z)$, находящаяся внутри контура K , и новая пристроенная часть этой функции, определенная в выступающей доле круга сходимости S , образуют одно целое, в смысле монотонности, дающееся суммой ряда Тейлора (II) в его круге сходимости S .

То обстоятельство, что за кругом сходимости C ряд Тейлора расходится, показывает, что на окружности этого круга имеются точки, за которые уже невозможно произвести моногенное расширение рассматриваемой функции $f(z)$. Такие точки называются особыми для моногенной функции $f(z)$.

Чаще всего моногенная функция $f(z)$ дается так, что о всех ее особых точках мы заранее имеем отчетливое представление. В этом случае определить радиус сходимости ρ ряда Тейлора очень просто: нужно найти ближайшую особую точку к точке $z=a$ и провести через нее окружность C , имеющую центр в точке $z=a$; этот круг C и будет кругом сходимости разложения в ряд Тейлора в точке $z=a$ рассматриваемой функции $f(z)$.

Это и есть знаменитый принцип функций комплексного переменного, освобождающий нас от ставшего ненужным исследования остаточного члена ряда Тейлора (см. § 84).

Пример. Функция действительного переменного $\frac{1}{1+x^2}$ безгранично дифференцируема по всей оси OX , но разлагается в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots,$$

сходящийся лишь в промежутке сходимости $(-1, +1)$. Указать истинную причину этого.

Решение. С точки зрения действительного переменного понять это невозможно, ибо функция $\frac{1}{1+x^2}$ безгранично дифференцируема вдоль всей оси OX . Но объяснить промежуток сходимости $(-1, +1)$ с точки зрения комплексного переменного чрезвычайно легко. Именно, функция комплексного переменного $\frac{1}{1+z^2}$ не-моногенна только в двух точках, которые обращают знаменатель ее в нуль, т. е. при $1+z^2=0$. Эти точки суть $z_1 = +i$ и $z_2 = -i$. В них функция становится бесконечностью. Во всех же других точках она моногенна. Поэтому разложение Маклорена: $1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots$, дающее функцию $\frac{1}{1+z^2}$, имеет круг сходимости C , упирающийся в особые точки $+i$ и $-i$. Если бы мы разлагали эту функцию в какой-нибудь точке a действительной оси, то получили бы ряд Тейлора, сходящийся в круге C^* радиуса ρ , упирающимся в особые точки $+i$ и $-i$ (рис. 102). Поэтому $\rho = \sqrt{1+a^2}$ и интервал сходимости этого ряда Тейлора (в действительном переменном) будет $(a - \sqrt{1+a^2}, a + \sqrt{1+a^2})$.

Предвидеть это можно только при помощи комплексного переменного.

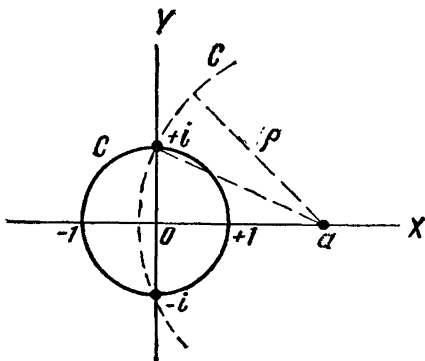


Рис. 102

§ 101. Показательные и тригонометрические функции с комплексным переменным. Если функция $f(z)$ комплексного переменного разлагается в степенной ряд:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (1)$$

сходящийся для всякого действительного или комплексного числа z , тогда такую функцию $f(z)$ называют *целой функцией*. Целая функция моногенна во всей плоскости. Простейшими примерами служат многочлены $P(z)$, содержащие только *конечное* число степеней z , ибо коэффициенты при остальных степенях *суть нули*.

Но кроме многочленов имеются еще и другие целые функции, содержащие в их степенных рядах бесчисленное множество членов с коэффициентами, отличными от нуля. Это так называемые *целые трансцендентные функции*.

С такими тремя целыми трансцендентными функциями мы уже познакомились (см. § 84), ибо разложения:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad (4)$$

которые мы тогда рассматривали лишь для действительного переменного x , оказались сходящимися для всякого действительного x . Поэтому ряды эти должны быть сходящимися и для каждого комплексного значения z , когда мы вместо буквы x напишем букву z . В самом деле, если бы какой-нибудь из этих рядов расходился для некоторого комплексного значения z_0 , то этот ряд был бы наверное расходящимся за кругом радиуса $|z_0|$ и, значит, не мог бы оказаться сходящимся по всей действительной оси OX .

Итак, ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

сходятся для всякого комплексного z и, следовательно, являются разложениями некоторых трех целых трансцендентных функций, которые мы будем обозначать по-прежнему соответственно через e^z , $\sin z$ и $\cos z$.

Таким образом мы пишем:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (5)$$

Из этих равенств вытекают *все* свойства показательных и тригонометрических функций.

Так, дифференцируя ряды почленно, мы немедленно получаем, как и для действительного переменного:

$$\frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

Далее, для z^* фиксированного, функция e^{z+z^*} есть моногенная везде от буквы z . Дифференцируя, имеем

$$\frac{de^{z+z^*}}{dz} = \frac{de^{z+z^*}}{d(z+z^*)} \cdot \frac{d(z+z^*)}{dz} = e^{z+z^*} \cdot 1 = e^{z+z^*}. \quad (6)$$

Следовательно, функция e^{z+z^*} при дифференцировании по z сохраняется, и, значит, вообще, $\frac{d^n (e^{z+z^*})}{dz^n} = e^{z+z^*}$.

Разлагая e^{z+z^*} в ряд Маклорена, имеем:

$$\begin{aligned} e^{z+z^*} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{d^n (e^{z+z^*})}{dz^n} \right]_{z=0}}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[e^{z+z^*}]_{z=0}}{n!} \cdot z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z^*}}{n!} z^n = e^{z^*} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^{z^*} \cdot e^z = e^z \cdot e^{z^*}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили основное свойство функции e^z , выражаемое равенством

$$e^{z+z^*} = e^z \cdot e^{z^*}, \quad (7)$$

где z и z^* — два произвольные комплексные числа.

Из равенства (5) мы непосредственно имеем:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad (8)$$

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-zi} = \cos z - i \sin z. \quad (9)$$

Отсюда, складывая и вычитая равенства (9), мы приходим к *самым основным формулам, впервые открытым Эйлером*:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \quad (10)$$

Наконец, если мы положим $z = x + iy$, где x и y суть действительные переменные, то имеем:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что модуль выражения e^z равен e^x , а аргументом служит просто y :

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Так как e^x никогда не обращается в нуль ни при каком действительном x , то функция e^z не обращается нигде в нуль.

Заметим, что из (9) следует, что $e^{2\pi i} = 1$.

Поэтому

$$e^z = e^z \cdot 1 = e^{z \cdot 2\pi i} = e^{z+2\pi i}.$$

Значит, показательная функция e^z есть периодическая функция с чисто мнимым периодом $2\pi i$.

§ 102. Гиперболические функции. Обычные тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс являются прямолинейными отрезками PM , OP и AQ , построенными для окружности (рис. 103), уравнение которой есть $x^2 + y^2 = 1$. При этом, угол φ можно измерять

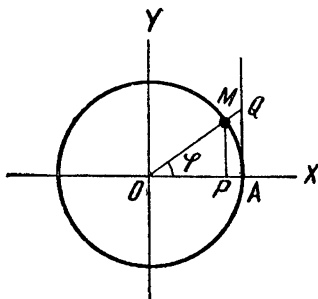


Рис. 103

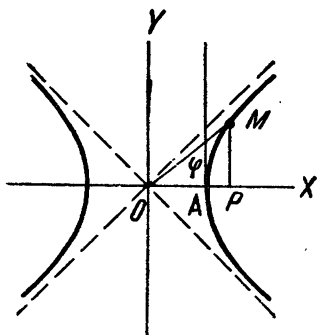


Рис. 104

не только дугой AM , но и удвоенной площадью кругового сектора AOM , так что, полагая 2 площ. $AOM = \varphi$, мы имеем $PM = \sin \varphi$, $OP = \cos \varphi$, $AQ = \operatorname{tg} \varphi$.

Аналогично, если вместо окружности $x^2 + y^2 = 1$ возьмем равнобочную гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, то для нее можно провести такие же прямолинейные отрезки PM , OP и AQ (рис. 104), какие мы проводили раньше для окружности, и можно назвать их соответственно *гиперболическими синусом, косинусом и тангенсом*. При этом за аргумент берут удвоенную площадь гиперболического сектора AOM ; обозначая этот аргумент через φ , пишут: $PM = \operatorname{sh} \varphi$, $OP = \operatorname{ch} \varphi$ и $AQ = \operatorname{th} \varphi$.

Нашей целью является получение рядов для $\operatorname{sh} \varphi$, $\operatorname{ch} \varphi$ и установление связи с тригонометрическими и показательными функциями при помощи мнимостей.

Введя обозначение координат точки M буквами x и y , мы можем написать равенство:

$$\text{пл. } AOM = \text{пл. } POM - \text{пл. } PAM.$$

$$\text{Но площадь } POM = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot PM = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

Площадь же $PAM = \int_1^x y dx = \int_1^x \sqrt{t^2-1} dt$, ибо из уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ следует, что $y = \sqrt{x^2-1}$, и надо еще при этом, во избежание недоразумений, обозначить переменное интегрирования не буквой x , но другой буквой, например буквой t .

Итак:

$$\text{пл. } AOM = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{t^2-1} dt. \quad (1)$$

Обращаясь теперь к формуле XXI таблицы основных интегралов (см. § 8), мы видим, что неопределенный интеграл берется до конца:

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Поэтому определенный интеграл равен:

$$\begin{aligned} \int_1^x \sqrt{t^2-1} dt &= \left[\frac{t}{2} \sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2-1}) \right]_1^x = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя найденную величину определенного интеграла в формулу (1), имеем:

$$\text{пл. } AOM = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

т. е.

$$2 \text{ пл. } AOM = \varphi = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \ln(x + y). \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$-\varphi = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) = \ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(x - y).$$

Поэтому

$$x + y = e^\varphi \text{ и } x - y = e^{-\varphi}.$$

Складывая и вычитая, находим:

$$x = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \text{ и } y = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

И так как $OP = \operatorname{ch} \varphi$ и $PM = \operatorname{sh} \varphi$, то окончательно получаем:

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}. \quad (4)$$

Что же касается отрезка AQ , то он определяется из пропорции $\frac{AQ}{OA} = \frac{PM}{OP}$, и так как $OA = 1$, а $AQ = \operatorname{th} \varphi$, то имеем:

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}. \quad (5)$$

Полученные формулы (4) и (5) выражают гиперболические функции $\operatorname{sh} \varphi$, $\operatorname{ch} \varphi$ и $\operatorname{th} \varphi$ через показательные функции при действительном значении аргумента φ .

Сохраняя те же формулы (4) и (5) при всяких значениях аргумента как действительных, так и комплексных, мы должны написать:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}. \quad (6)$$

Если мы теперь обратимся к формулам Эйлера [101, (10)], то немедленно замечаем, что

$$\operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i}, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{tg} iz}{i}. \quad (7)$$

Можно поэтому сказать, что гиперболический косинус $\operatorname{ch} z$ на действительной оси есть не что иное, как обычный тригонометрический косинус на мнимой оси, а гиперболические синус и тангенс суть обыкновенные синус и тангенс на мнимой оси, разделенные на i .

Формулы (7), выражающие гиперболические функции через обычные тригонометрические, позволяют сделать и обратное, т. е. выразить обычные тригонометрические функции через гиперболические. Это важно для того, чтобы превращать всякое соотношение между обычными тригонометрическими функциями в соотношение между гиперболическими функциями. *Всякая формула тригонометрии круга превращается в формулу тригонометрии гиперболы, когда сделают замену $\cos z$ через $\operatorname{ch} z$ и $\sin z$ через $i \operatorname{sh} z$.*

Таким образом, например, соотношение $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ превращается в

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1. \quad (8)$$

Формулы сложения:

$$\begin{aligned} \sin(z + z^*) &= \sin z \cos z^* + \cos z \sin z^* \\ \cos(z + z^*) &= \cos z \cos z^* - \sin z \sin z^* \end{aligned}$$

превращаются в формулы сложения гиперболических функций:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(z + z^*) &= \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z^* + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z^*, \\ \operatorname{ch}(z + z^*) &= \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z^* + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z^*. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким же образом получаются формулы:

$$\operatorname{sh} z = \frac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z}}. \quad (10)$$

Более интересными являются функции, обратные гиперболическим, а именно: $\arg \operatorname{sh} z$, $\arg \operatorname{ch} z$ и $\arg \operatorname{th} z$, благодаря тому, что они выразимы через логарифмы. Именно, решая уравнения (6) относительно буквы z , мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \arg \operatorname{sh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \arg \operatorname{ch} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \arg \operatorname{th} z &= \ln \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Дифференцируя соотношения (7) и (11), мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \operatorname{sh} z}{dz} &= \operatorname{ch} z, & \frac{d \operatorname{ch} z}{dz} &= \operatorname{sh} z, & \frac{d \operatorname{th} z}{dz} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} = 1 - \operatorname{th}^2 z, \\ \frac{d \arg \operatorname{sh} z}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, & \frac{d \arg \operatorname{ch} z}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, & \frac{d \arg \operatorname{th} z}{dz} &= \frac{1}{1 - z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ряды для разложения $\operatorname{sh} \varphi$ и $\operatorname{ch} \varphi$ по степеням φ получаем из формулы (4), производя разложения e^φ и $e^{-\varphi}$. Таким образом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi &= \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \\ \operatorname{ch} \varphi &= 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти ряды сходятся всюду, ибо $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ суть целые функции.

§ 102а. Понятие о конформном отображении. Наиболее естественно приходят к этому понятию, рассматривая географическую карту какой-нибудь поверхности S . Мы называем «географической картой» поверхности S такое ее отображение на плоскость, при котором их точки соответствуют друг другу взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Наиболее интересными картами являются те, в которых *сохранены углы*, т. е. в которых угол, образуемый двумя какими-нибудь пересекающимися кривыми линиями, начерченными на плоскости, всегда равен углу между кривыми, соответствующими им на поверхности. В этих условиях бесконечно малые части на поверхности и на карте *подобны друг другу*. Таким именно образом наносятся на бумагу обычные географические карты земной поверхности: при правильном ее нанесении всякий небольшой участок суши почти подобен соответствующему изображению его на карте и, следовательно, у нас на карте нет чувствительного искажения, но имеется лишь *пропорциональное уменьшение*, благодаря чему мы имеем возможность верно судить об очертаниях участка и взаимном расположении его элементов.

При точно начерченной карте, сохраняющей углы, чем меньше размеры рассматриваемого участка поверхности S , тем ближе к истинному подобию его изображение на карте. Поэтому, вместо того, чтобы сразу дать изображение всей поверхности S на карте, предпочитают разбивать S на участки и изображать на карте каждый из них в отдельности. Так составляется географический атлас.

Ясно, что если имеем карту какого-нибудь участка поверхности S , то из этой карты мы можем получить бесконечное множество других таких карт: для этого достаточно карту D^* этого участка поверхности S подвергнуть преобразованию, сохраняющему углы, заставив ее перейти в плоскую область D . Ясно, что в этих условиях область D точно так же окажется картой рассматриваемого участка поверхности S .

Для большей точности прибавим, что обе области D^* и D являются *внутренностью*: первая замкнутой не пересекающей саму себя кривой C^* , лежащей в плоскости UOV , вторая аналогичной замкнутой кривой C , лежащей в плоскости XOY (рис. 105).

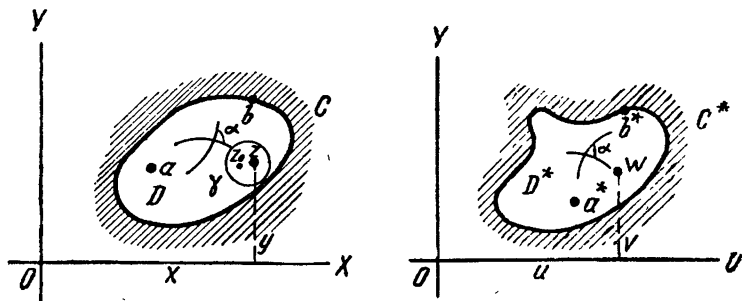


Рис. 105

Таким образом, для получения *всех* карт D заданного участка поверхности S достаточно уметь преобразовывать известную нам плоскую область D^* в какую-нибудь другую плоскую область D посредством взаимно непрерывного преобразования, *сохраняющего углы*.

Такие преобразования плоских областей одна в другую называются *конформными отображениями*. Их очень удобно себе представлять осуществляемыми *посредством функций комплексного переменного*.

В самом деле, обозначая через w и z две точки, лежащие в областях D^* и D и соответствующие друг другу в конформном отображении, мы можем аффикс точки w написать в виде комплексного числа $u + iv$, где u и v суть координаты точки w . Аналогично, аффикс точки z пишем в виде $x + iy$. Сохраняя для аффиксов те же самые обозначения, как и для самих точек, мы можем написать:

$$w = u + iv;$$

$$z = x + iy.$$

Если теперь комплексное переменное z изменяется и, значит, точка z начинает двигаться в области D , то соответственная точка w в конформном отображении тоже приходит в движение и, значит, начинает изменяться комплексное переменное w . Наоборот, при постоянном z является постоянным и w .

Из сказанного следует, что комплексное переменное w является функцией комплексного переменного z ; следовательно, мы можем написать

$$w = f(z), \quad (1)$$

где $f(z)$ есть непрерывная функция на области D , включая сюда и самый контур C , принимающая существенно различные значения w_1 и w_2 для всякой пары z_1 и z_2 различных значений независимого переменного z , т. е. мы имеем:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \text{ если } z_1 \neq z_2.$$

Это следует из того, что двум различным точкам области D отвечают две существенно различные точки области D^* . Такие функции $f(z)$ называются *однолиственными* из области D .

В этих условиях ясно, что и переменное z является функцией переменного w , т. е. мы имеем:

$$z = g(w), \quad (2)$$

где функция $g(w)$ есть непрерывная в области D^* , включая сюда периферию C^* , и также однолиственная в этой области.

Но самым важным при этом является то требование, при котором преобразование (1) дает конформное отображение области D на область D^* , т. е. сохраняет углы внутри этих областей. Ясно, что преобразование (2) дает это же самое конформное отображение и что оно получается решением уравнения (1) относительно буквы z .

Лемма 1. *Линейная подстановка $w = az + b$, $a \neq 0$, дает конформное преобразование плоскости самой в себя с сохранением бесконечно удаленной точки $z = \infty$.*

Доказательство. Общая линейная подстановка $w = az + b$ получается применением трех частных линейных подстановок. А именно, написав постоянный коэффициент a в тригонометрической форме

$$a = Re^{i\Phi},$$

мы можем разбить подстановку $w = az + b$ на три элементарные подстановки

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= e^{i\Phi} \cdot z, \\ z_2 &= Rz_1, \\ w &= z_2 + b. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В самом деле, исключая две вспомогательные буквы z_1 и z_2 из трех уравнений (3), мы получаем, очевидно, подстановку $w = az + b$.

Но первая элементарная подстановка $z_1 = e^{i\Phi} \cdot z$ есть *вращение* z -плоскости около начала O на постоянный угол Φ , ибо, полагая $z = re^{i\theta}$, мы

имеем $z_1 = \rho e^{i(\theta+\Phi)}$, т. е. точка z_1 получается поворотом всей z -плоскости около начала O на постоянный угол Φ . А вращение, разумеется, сохраняет углы в поворачиваемых фигурах (рис. 106).

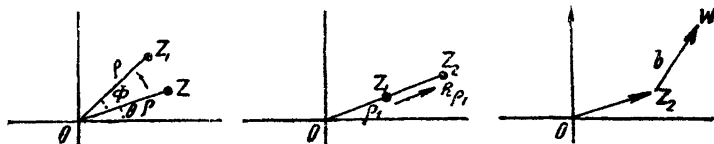


Рис. 106

Вторая элементарная подстановка $z_2 = Rz_1$, где $R > 0$ и есть величина постоянная, есть *преобразование подобия* в z_1 -плоскости, ибо, полагая $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, мы имеем $z_2 = R\rho_1 e^{i\theta_1}$, т. е. точка z_1 отодвигается от начала O по прямой, соединяющей ее с ним, на пропорциональное расстояние $R\rho_1$. Сказанное относится к случаю, когда $R > 1$; если, наоборот, имеем $R < 1$, тогда точка z_1 придвигается к началу O . Из элементарной геометрии известно, что преобразование подобия изменяет лишь *размеры* фигур, оставляя без изменения их *форму* т. е. *углы их линий*.

Третья элементарная подстановка $w = z_2 + b$ есть просто перенос всей z_2 -плоскости как твердого тела, без всякого вращения, характеризуемый вектором b , ибо мы имеем $w = z_2 + b$, т. е. точка z_2 переносится в конец вектора b , приставленного к ней. Такое поступательное движение фигур, разумеется, сохраняет их размеры и форму, т. е. сохраняет углы их линий.

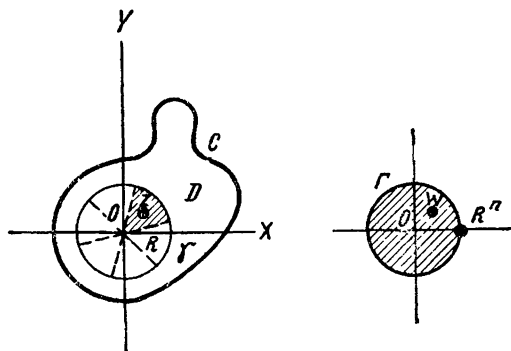


Рис. 107

Как следствие сказанного вытекает, что общая линейная подстановка $w = az + b$, являясь комбинацией вращения плоскости, преобразования подобия и поступательного движения, сохраняет углы фигур, т. е. дает конформное преобразование.

Лемма 2. Функция $f(z) = z^n$ при $n > 1$ не может быть однолистной в области D , содержащей начало O .

Доказательство. Пусть начало O лежит внутри кривой C , ограничивающей область D . Проведем какую-нибудь окружность γ радиуса R с центром O , целиком лежащую внутри области D (рис. 107). Разделив окружность γ на n равных дуг, мы проводим в точки деления радиусы. Таким образом, мы получаем n равных круговых секторов. Легко видеть, что в каждом из них функция $w = f(z)$ однолистка и имеет значения, сплошь покрывающие в w -плоскости круг Γ , описанный из начала O как из центра радиусом R^n . Чтобы это доказать, заметим, что когда точка $z = \rho e^{i\theta}$ вычерчивает весь сектор, крайние радиусы которого имеют наклоны φ и $\varphi + \frac{2\pi}{n}$, тогда соответствующая точка $w = z^n = \rho^n e^{in\theta}$ заштриховывает

весь круг Γ в w -плоскости, потому что длина вектора w изменяется от 0 до R^n , а его наклон от $n\varphi$ до $n\varphi + 2\pi$. Таким образом, при пробеге точкой z круга γ точка w пробегает n раз круг Γ . Поэтому при $n > 1$ функция $f(z)$ не однолистка в области D . ч. т. д.

Из доказанных лемм следует основное предложение.

Прямая теорема. Если однолистная функция $f(z)$ монотонна всюду внутри области D , отображение $w = f(z)$ есть конформное.

Доказательство. Пусть в области D функция $f(z)$ однолистка и монотонна (рис. 105). Мы знаем, что всякая монотонная в области D функция $f(z)$ разложима в степенной ряд

$$w = f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots, \quad (4)$$

сходящийся внутри круга γ , имеющего центром точку z_0 и не выходящего за область D . Здесь коэффициенты a_0, a_1, \dots суть постоянные числа, ибо они зависят только от точки z_0 , причем мы знаем, что

$$a_0 = f(z_0) \quad \text{и} \quad a_1 = f'(z_0). \quad (5)$$

Легко видеть, что ни в какой точке z_0 области D производная $f'(z)$ не может обратиться в нуль. Ибо если мы имели $f'(z_0) = 0$, то тогда $a_1 = 0$ и, значит, вблизи точки z_0 и пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, разложение (4) напишется в виде:

$$w = a_0 + a_n(z - z_0)^n, \quad \text{где } n < 1. \quad (6)$$

Но по лемме 2 функция (6) не может быть однолистной в области D , содержащей точку z_0 . По этой причине не может быть однолистной внутри D и сама функция $f(z)$, что противоречит предположению.

Итак, во всякой точке z_0 области D мы имеем $f'(z_0) = a_1 \neq 0$. Поэтому, вблизи точки z_0 и пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, разложение (4) напишется в виде линейной подстановки

$$w = a_0 + a_1(z - z_0). \quad (7)$$

А в силу леммы 1. она сохраняет углы кривых, пересекающихся в точке z_0 . Поэтому отображение $w = f(z)$ должно быть конформным всюду в области D . ч. т. д.

Обратная теорема. Всякое конформное отображение области D на область D^* осуществляется только монотонными однолистными функциями $w = f(z)$, причем можно подобрать так функцию $f(z)$, чтобы точка a области D перешла в произвольно выбранную точку a^* области D^* и точка b кривой C перешла в произвольно выбранную точку b^* кривой C^* . При сделанном выборе точек a^* и b^* функция $f(z)$ определяется единственным образом.

Доказательство этой важной теоремы нельзя дать в элементарном курсе анализа. Важность теоремы в том, что она вполне отождествляет конформные отображения и однолистные монотонные функции.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 103. Дифференциальные уравнения. Их порядок и степень. Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит производные или дифференциалы неизвестной функции. С дифференциальными уравнениями мы уже имели дело. Так, из дифференциального уравнения (см. § 21)

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

мы нашли, интегрируя,

$$y = x^2 + C. \quad (2)$$

Далее (там же), проинтегрировав дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (3)$$

мы получили решение

$$x^2 + y^2 = 2C. \quad (4)$$

Уравнение (1) и (3) суть уравнения *первого порядка*, а (2) и (4) их **общие решения**.

Другим примером является

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \quad (5)$$

Это есть дифференциальное уравнение *второго порядка*, называющееся так согласно порядку производной.

Вообще, *порядком дифференциального уравнения* называется порядок наивысшей производной, содержащейся в нем.

Порядок дифференциального уравнения следует отличать от его степени: *высшая* производная может содержаться в дифференциальном уравнении в различных степенях: самый большой показатель степени называется *степенью* дифференциального уравнения.

Так, дифференциальное уравнение

$$y''^2 = (1 + y')^3 \quad (6)$$

есть уравнение второго порядка и второй степени.

§ 104. Решение дифференциальных уравнений. Постоянные интегрирования. *Решением или интегралом* дифференциального уравнения называется такое соотношение между переменными величинами, следствием которого является данное дифференциальное уравнение. Так, соотношение

$$y = a \sin x \quad (1)$$

есть *решение* дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0. \quad (2)$$

Ибо, дифференцируя дважды соотношение (1), имеем:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -a \sin x. \quad (3)$$

Подставляя же величину y и $\frac{d^2 y}{dx^2}$ из (1) и (3) в данное дифференциальное уравнение (2), мы получаем тождество:

$$-a \sin x + a \sin x \equiv 0. \quad (4)$$

Значит, уравнение (2) тождественно удовлетворено и притом при *произвольном* постоянном a . Точно так же

$$y = b \cos x$$

является решением уравнения (2) при всяком постоянном b .

Соотношение же

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad (5)$$

является еще более общим решением дифференциального уравнения (2), ибо указанные выше решения (1) и (4) включаются, очевидно, в это решение (5), когда мы даем произвольным постоянным C_1 и C_2 частные численные значения, полагая сперва $C_1 = a$, $C_2 = 0$, а потом $C_1 = 0$, $C_2 = b$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 , содержащиеся в (5), называются *постоянными интегрирования*. Всякое решение вроде (5), которое содержит столько же произвольных постоянных, сколько единиц содержится в порядке уравнения (в рассматриваемом примере — две), называются *общим решением*¹. Решения, выводимые

¹ Доказывается, что общее решение всегда содержит n произвольных постоянных, когда дифференциальное уравнение есть n -го порядка. Здесь и выше имеются в виду лишь *независимые друг от друга* произвольные постоянные, число их уже нельзя уменьшить.

из общего решения путем задания произвольным постоянным определенных численных значений, называются *частными решениями*. На практике частное решение ищется из общего решения не прямым заданием произвольным постоянным определенных численных значений, но исходя из тех условий, которым должно удовлетворить искомое частное решение.

Пример. Общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

есть: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Найти частное решение, такое, что имеем:

$$y = 2 \text{ и } y' = -1, \text{ когда } x = 0. \quad (2)$$

Решение. Из общего решения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (3)$$

дифференцированием получаем:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (4)$$

Учитывая условия (2), налагаемые на искомое частное решение $y(x)$, мы получаем $C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Вставляя эти численные значения постоянных C_1 и C_2 в общее решение (3), мы получаем искомое частное решение в виде $y = 2 \cos x - \sin x$.

Обычно считается, что решение дифференциального уравнения доведено до конца, когда его удалось получить в виде выражения, содержащего неопределенные интегралы («квadrатуры»), нужды нет, можно ли их «взять» или нет.

§ 105. Проверка решений дифференциальных уравнений. Прежде чем приступить к задаче решения дифференциальных уравнений, покажем, каким образом проверяется найденное или данное решение.

Пример 1. Показать, что

$$y = C_1 x \cos \ln x + C_2 x \sin \ln x + x \ln x \quad (1)$$

есть решение дифференциального уравнения

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x. \quad (2)$$

Решение. Дифференцируя (1), мы получим:

$$\frac{dy}{dx} = (C_2 - C_1) \sin \ln x + (C_2 + C_1) \cos \ln x + \ln x + 1, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -(C_2 + C_1) \frac{\sin \ln x}{x} + (C_2 - C_1) \frac{\cos \ln x}{x} + \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Подставив из (1), (3) и (4) величины y , $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$ в уравнение (2), мы находим, что уравнение (2) *тождественно* удовлетворено.

Пример 2. Показать, что

$$y^2 - 4x = 0 \quad (5)$$

есть частное решение дифференциального уравнения

$$xy'^2 - 1 = 0. \quad (6)$$

Решение. Дифференцируя (5), мы получаем:

$$yy' - 2 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{2}{y}.$$

Подставив эту величину производной y' в (6) и выполнив приведение, мы находим:

$$x \left(\frac{2}{y} \right)^2 - 1 = 0,$$

т. е.

$$4x - y^2 = 0.$$

А этот результат тождественно верен в силу равенства (5).

ЗАДАЧИ

Проверить следующие решения соответствующих дифференциальных уравнений.

| Дифференциальные уравнения | Решения |
|--|--|
| 1. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$ | $y = C_1x + C_2x^2.$ |
| 2. $\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0.$ | $V = \frac{C_1}{r} + C_2.$ |
| 3. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = 0.$ | $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}.$ |
| 4. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7 \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$ | $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-3x}.$ |
| 5. $8 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - \frac{12y}{x} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 27 = 0.$ | $C(y + C)^2 = x^3.$ |
| 6. $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - xy = 0.$ | $xy = C_1e^x + C_2e^{-x}.$ |
| 7. $\frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0.$ | $s = C_1 \sin(kt + C_2).$ |
| 8. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 2x.$ | $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-5x} - \frac{x}{5} - \frac{3}{50}.$ |
| 9. $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 0.$ | $\frac{x^2}{C_1} + \frac{y^2}{C_2} = 1.$ |
| 10. $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + 5y = \frac{1}{x}.$ | $4y = \frac{1}{3x} + C_1x^5 + C_2x.$ |
| 11. $x \frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$ | $\arcsin \frac{y}{x} = C - x.$ |
| 12. $\frac{d^3s}{dt^3} + 9s = t + \frac{1}{2}.$ | $s = 5 \cos 3t + \frac{1}{9}t + \frac{1}{18}.$ |

$$13. \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 6e^t. \quad x = e^t + 2te^t + 3t^2e^t.$$

$$14. \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 10 \sin 3t. \quad x = 2(\sin 2t - \sin 3t).$$

$$15. \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin 2t. \quad x = 2(1 - t) \cos 2t.$$

$$16. \frac{ds}{dt} + \frac{2ts}{t^2 + 1} = \frac{1}{t}. \quad s = \frac{\frac{1}{2}t^2 + \ln t}{t^2 + 1}.$$

§ 106. Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. Все такие уравнения могут быть написаны в виде

$$Mdx + Ndy = 0, \quad (A)$$

где M и N суть непрерывные функции букв x и y . Наиболее часто встречающиеся дифференциальные уравнения этого рода подразделяются на следующие четыре типа.

Тип I. Уравнения с отделимыми переменными. Когда члены дифференциального уравнения можно распределить так, чтобы оно приняло вид:

$$f(x)dx + F(y)dy = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ есть непрерывная функция только x , а $F(y)$ есть непрерывная функция только y , то процесс приведения уравнения к написанной форме называется *отделением переменных*. Решение такого уравнения получается прямым интегрированием. Так, интегрируя (1), получаем общее решение:

$$\int f(x)dx + \int F(y)dy = C, \quad (2)$$

где C — произвольное постоянное.

Уравнения, заданные не в такой простой форме, как (1), часто можно бывает привести к этому виду, пользуясь нижеследующим *правилом отделения переменных*.

Первый шаг. Освобождаемся от дробей и, если уравнение содержит производные, умножаем его на дифференциал независимого переменного.

Второй шаг. Соединяем в один член все члены, содержащие один и тот же дифференциал. Если после этого уравнение примет вид

$$X_1Y_1dx + X_2Y_2dy = 0,$$

где X_1, X_2 суть функции только x , а Y_1, Y_2 — функции только y , то его можно привести к виду (1), разделив на X_2, Y_1 .

Третий шаг. Интегрируем каждую часть отдельно, как в (2).

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}.$$

Решение. Первый шаг.

$$(1+x^2)xy\,dy = (1+y^2)\,dx.$$

Второй шаг.

$$(1+y^2)\,dx - x(1+x^2)y\,dy = 0.$$

Чтобы отделить переменные, мы теперь делим на $x(1+x^2)(1+y^2)$.
Это дает

$$\frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0.$$

Третий шаг.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} &= C, \\ \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} &= C, \\ \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) &= C, \\ \ln(1+x^2)(1+y^2) &= 2 \ln x - 2C. \end{aligned}$$

Результат этот можно написать в более сжатом виде, если мы заменим $-2C$ через $\ln C$, т. е. если мы дадим новый вид произвольному постоянному. Наше решение тогда становится:

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2)(1+y^2) &= \ln x^2 + \ln C, \\ \ln(1+x^2)(1+y^2) &= \ln Cx^2. \end{aligned}$$

$$\text{Отв. } (1+x^2)(1+y^2) = Cx^2.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$a\left(x \frac{dy}{dx} + 2y\right) = xy \frac{dy}{dx}.$$

Решение.

Первый шаг.

$$ax\,dy + 2ay\,dx = xy\,dy.$$

Второй шаг.

$$2ay\,dx + x(a-y)\,dy = 0.$$

Для отделения переменных делим на xy :

$$\frac{2a\,dx}{x} + \frac{(a-y)\,dy}{y} = 0.$$

Третий шаг.

$$\begin{aligned} 2a \int \frac{dx}{x} + a \int \frac{dy}{y} - \int dy &= C, \\ 2a \ln x + a \ln y - y &= C, \quad a \ln x^2 y = C + y, \quad \ln x^2 y = \frac{C}{a} + \frac{y}{a}. \end{aligned}$$

Переходя от логарифмов к показательным функциям, можем этот результат написать в форме:

$$x^2 y = e^{\frac{C}{a} + \frac{y}{a}}, \quad \text{или} \quad x^2 y = e^{\frac{C}{a}} \cdot e^{\frac{y}{a}}.$$

Наконец, обозначив постоянное $e^{\frac{C}{a}}$ буквой C , имеем общее решение в виде

$$x^2 y = C e^{\frac{y}{a}}.$$

Тип II. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение

$$M dx + N dy = 0 \quad (A)$$

называется *однородным*, когда M и N суть однородные функции от x и y *одинаковой* степени¹. Такие дифференциальные уравнения всегда можно интегрировать посредством подстановки

$$y = vx. \quad (3)$$

Эта подстановка приводит к дифференциальному уравнению относительно v и x , в котором эти переменные отделимы и которое, следовательно, можно интегрировать по правилу типа I.

В самом деле, из (A) мы получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}. \quad (4)$$

А после подстановки (3) имеем в левой части равенства (4)

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v. \quad (5)$$

Правая же часть равенства (4) становится функцией одного только v , когда сделана подстановка (3)². Поэтому, пользуясь (5) и (3), мы получаем из (4):

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v) \quad (6)$$

и, значит, переменные x и v легко *отделимы*.

Пример. Решить уравнение

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

Решение.

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0.$$

¹ Какая-нибудь функция от x и y называется *однородной* относительно этих переменных, если результат замены x и y количествами λx и λy (где λ произвольно) приводит к первоначальной функции, умноженной на некоторую степень буквы λ . Эта степень называется *степенью* рассматриваемой однородной функции.

² В самом деле, $\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = \frac{M(x, xv)}{N(x, xv)} = \frac{x^m M(1, v)}{x^m N(1, v)} = \frac{M(1, v)}{N(1, v)}$, где m — степень однородных функций M и N .

Здесь $M = y^2$, $N = x^2 - xy$; оба они однородны и второй степени относительно букв x и y . Таким образом, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Подставим $y = vx$. Результатом подстановки будет:

$$x \frac{dv}{dx} + v = -\frac{v^2}{1-v} \quad \text{или} \quad v dx + x(1-v) dv = 0.$$

Чтобы отделить переменные, делим на vx . Это дает:

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-v) dv}{v} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} - \int dv = C,$$

$$\ln x + \ln v - v = C,$$

$$\ln xv = C + v, \quad vx = e^{C+v} = e^C \cdot e^v, \quad vx = Ce^v. \quad \text{Но } v = \frac{y}{x}.$$

Поэтому общее решение есть $y = Ce^{\frac{x}{y}}$.

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений.

1. $(1+y) dx - (1-x) dy = 0$.

Отв. $(1+y)(1-x) = C$.

2. $xy dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$.

$y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\sqrt{1-y^2} dx = \sqrt{1+x^2} dy$.

$\arcsin y = \ln C(x + \sqrt{1+x^2})$.

4. $\sqrt{1+y^2} dx = (1-x^2) dy$.

$C(y + \sqrt{1+y^2}) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

5. $(1+x^2) dy = \sqrt{1-y^2} dx$.

$\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x+C}{1-Cx}$.

6. $(1+y^2) x dx + (1+x^2) dy = 0$.

$\arctg y + \ln C\sqrt{1+x^2} = 0$.

7. $(2x+1) dy + y^2 dx = 0$.

$Ce^{-\frac{1}{y}} = \sqrt{2x+1}$.

8. $(1+2y) x dx + (1+x^2) dy = 0$.

$(1+x^2)(1+2y) = C$.

9. $(1+y^2) dy - y dx = 0$.

$x = \frac{y^3}{2} + \ln Cy$.

10. $(x+y) dx + x dy = 0$.

$x^2 + 2xy = C$.

11. $(x+y) dx + (y-x) dy = 0$.

$\ln(x^2 + y^2) - 2 \arctg \frac{y}{x} = C$.

12. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

$1 + 2Cy - C^2 x^2 = 0$.

13. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$.

$y^3 = 3x^3 \ln Cx$.

14. $(x^2 - 2y^2) dx + 2xy dy = 0$.

$y^2 + x^2 \ln Cx = 0$.

15. $(x^2 + y^2) dx = 2xy dy$. $y^2 = x^2 + Cx$.
 16. $\frac{du}{dv} = \frac{1+u^2}{1+v^2}$. $u = \frac{C+v}{1-cv}$.
 17. $\sqrt{1-x^2} dy + \sqrt{1-y^2} dx = 0$. $z\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = C$.
 18. $2x^2y dy = (1+x^2) dx$. $y^2 = x - \frac{1}{x} + C$.
 19. $(x^2y + x) dy + (xy^2 - y) dx = 0$. $xy + \ln \frac{y}{x} = C$.
 20. $\sqrt{1-y^2} dx = 3x^2y dy$.
 21. $x dy - y dx = \sqrt{y^2 - x^2} dx$.
 22. $(y^2 - 9) dx + x dy = 0$.
 23. $(2x + y) dx + (x + y) dy = 0$.
 24. $y^3 dx = (xy - x^2) dy$.
 25. $(\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0$.
 26. $(3x + 4y) dy = (2x - y) dx$.
 27. $(x + xy^2) dy - 3dx = 0$.
 28. $xy dy - (1 - y^2) dx = 0$.
 29. $(1 + x) dy - (1 - x) dx = 0$.

В каждой из следующих задач отыскать частное решение, определяемое данными численными значениями переменных x и y :

30. $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$; $x = 3$, $y = 4$. Отв. $x^2 + y^2 = 25$.
 31. $x(x + 2y) dy - y^2 dx = 0$; $x = 1$, $y = 1$. $xy + y^2 = 2x$.
 32. $(1 + y^2) dx - xy dy = 0$, $x = 1$, $y = 0$. $x^2 - y^2 = 1$.
 33. $(x + y) dy + (x - y) dx = 0$; $x = 0$, $y = 1$.
 34. Найти уравнение кривой, тангенс наклона которой во всякой точке равен $-\frac{y}{x+y}$ и которая проходит через точку $(1, 1)$.
 Отв. $y^2 + 2xy = 3$.
 35. Найти уравнение кривой, тангенс наклона которой в каждой точке равен $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$ и которая проходит через начало координат.

Отв. $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

Тип III. Линейные уравнения. *Линейное* дифференциальное уравнение первого порядка относительно y имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \quad (B)$$

где P и Q суть непрерывные функции одного x или же суть постоянные величины.

Аналогично, уравнение:

$$\frac{dx}{dy} + Hx = J, \quad (C)$$

где H и J суть непрерывные функции одного y или константы, есть *линейное* дифференциальное уравнение.

Чтобы интегрировать (B), полагают

$$y = uz, \quad (7)$$

где u и z суть неизвестные функции независимого переменного x , подлежащие определению. Дифференцируя равенство (7), имеем:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}. \quad (8)$$

Внося y и $\frac{dy}{dx}$ из равенства (7) и (8) в уравнение (B), получаем:

$$u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} + Puz = Q,$$

или

$$u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu \right) \cdot z = Q. \quad (9)$$

Мы всегда имеем право предположить, что *первая неизвестная функция* $u(x)$ уничтожает круглую скобку этого равенства, обращая ее в нуль, т. е. что

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0. \quad (10)$$

Действительно, чтобы отыскать такую функцию $u(x)$, нужно только проинтегрировать дифференциальное уравнение (10), что сделать нетрудно, ибо переменные x и u в этом уравнении отделимы.

Пользуясь же найденной функцией $u(x)$, мы отыскиваем *второй неизвестный множитель* $z(x)$, решая оставшуюся часть уравнения (9), после уничтожения в нем круглой скобки:

$$u \frac{dz}{dx} = Q. \quad (11)$$

В этом уравнении переменные x и z также легко отделимы. Ясно, что найденные функции $u(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнению (9) и, значит, решение линейного уравнения (B) будет дано формулой (7).

Следующие примеры укажут детали.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}. \quad (12)$$

Решение. Ясно, что это уравнение есть линейное и имеет вид (B), где

$$P = -\frac{2}{x+1} \quad \text{и} \quad Q = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Пусть $y = uz$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}.$$

Подставляя в данное уравнение (12), имеем:

$$u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{\frac{5}{2}},$$

или

$$u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} \right) z = (x+1)^{\frac{5}{2}}. \quad (13)$$

Первый множитель $u(x)$ определяем, приравнявая круглую скобку нулю. Это дает:

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0,$$

или

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x}.$$

Интегрируя, находим $\ln u = 2 \ln(1+x)$, откуда

$$u = e^{2 \ln(1+x)} = [e^{\ln(1+x)}]^2 = (1+x)^2. \quad (14)$$

С такой функцией $u(x)$ уравнение (12) становится:

$$u \frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{5}{2}}, \quad (13^*)$$

ибо член с множителем z выпадает. Приняв во внимание (14), мы можем переписать (13*) в виде

$$\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Интегрируя, имеем:

$$dz = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx,$$

т. е.

$$z = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C. \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в равенство $y = uz$, мы окончательно достигаем *общего решения*:

$$y = \frac{2}{3} \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3} + C(x+1)^2.$$

Пример 2. Вывести формулу общего уравнения (B).

Решение. Решая (10), имеем:

$$\ln u + \int P dx = \ln k,$$

где $\ln k$ есть постоянное интегрирования. Отсюда

$$u = k e^{-\int P dx}.$$

¹ Из самого определения натурального логарифма следует, что всегда $e^{\ln N} = N$. В целях простоты, определяя $u(x)$, мы опустили произвольное постоянное, положив его равным нулю (см. об этом следующий пример 2).

Подставляя эту величину функции $u(x)$ в (11) и отделяя переменные z и x , мы находим:

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int P dx} dx.$$

Интегрируя и подставляя в (7), мы получаем окончательно:

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + C \right).$$

Надо обратить внимание вот на что: *постоянное k выпадает из окончательного результата*. По этой причине его просто не пишут, решая уравнение (10).

Тип IV. Уравнения, приводимые к линейному виду. Некоторые уравнения, не будучи сами по себе линейными, однако могут быть приведены к линейной форме посредством надлежащих преобразований. Один из типов таких уравнений есть:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n, \quad (D)$$

где P и Q суть непрерывные функции одного только x или константы. Уравнение (D) приводится к линейному виду (B) посредством подстановки $z = y^{-n+1}$. Впрочем, такое приведение не является необходимым, если мы используем тот же самый прием для нахождения его решения, какой был дан вообще для всего типа III.

Это обнаруживается на примере.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a (\ln x) y^2. \quad (16)$$

Решение. Написанное уравнение имеет форму уравнения (D), ибо здесь

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = a \ln x, \quad n = 2.$$

Полагаем $y = uz$. Тогда $\frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}$.

Подставляя в (16), находим:

$$u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx} + \frac{uz}{x} = a \ln x \cdot u^2 z^2,$$

т. е.

$$u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} \right) z = a \ln x \cdot u^2 z^2. \quad (17)$$

Определяем первый множитель u , приравняв круглую скобку нулю. Это дает

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем: $\ln u = -\ln x = \ln \frac{1}{x}$; следовательно,

$$u = \frac{1}{x}. \quad (18)$$

После подстановки найденной функции $u(x)$ в уравнение (17), мы имеем:

$$u \frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot u^2 z^2, \quad \text{откуда} \quad \frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot u z^2.$$

Внося сюда величину функции $u(x)$, даваемую равенством (18), мы получаем:

$$\frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot \frac{z^2}{x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dz}{z^2} = a \ln x \cdot \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, мы находим $-\frac{1}{z} = \frac{a (\ln x)^2}{2} + C$, откуда

$$z = -\frac{2}{a (\ln x)^2 + 2C}. \quad (19)$$

Подставляя найденные множители u и z из (18) и (19) в равенство $y = u \cdot z$, мы приходим к общему решению:

$$y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{a (\ln x)^2 + 2C}$$

или

$$xy [a (\ln x)^2 + 2C] + 2 = 0.$$

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}.$

Отв. $y = (x + C) e^{-x}.$

2. $\frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x} = e^x x^n.$

$y = x^n (e^x + C).$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{ny}{x} = \frac{a}{x^n}.$

$y = \frac{ax + C}{x^n}.$

4. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1.$

$s = \sin t + C \cdot \cos t.$

5. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t.$

$s = \sin t - 1 + C e^{-\sin t}.$

6. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

$2y = (x+1)^4 + C(x+1)^3.$

7. $\frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}.$

$y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$

8. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3.$

$\frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + C e^{x^2}.$

9. $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x.$

$\frac{1}{y} = 1 + Cx + \ln x.$

10. $\frac{dy}{dx} + \frac{(1-2x)y}{x^2} = 1$. Отв. $y = x^2 \left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$.
11. $3 \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$. $60y^3(x+1)^2 = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + C$.
12. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3}$. $y = Ce^{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^3}$. $y(x^2+1)^2 = \arctg x + C$.
14. $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = y^3 \csc x$. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + C}}$.
15. $\frac{dy}{dx} = x + y$. 20. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = e^{ax}$.
16. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$. 21. $\frac{dy}{dx} - 4y = \sin 3x$.
17. $\frac{ds}{dt} \sin t + 2s \cos t = \sin 2t$. 22. $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^5 y^2$.
18. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$. 23. $y \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = \cos x$.
19. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{5x}$. 24. $x^3 \frac{dy}{dx} + 4y = 12$.

В каждой из следующих задач найти частное решение, определяемое заданными численными значениями для x и y .

25. $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x$; $x = 1, y = 0$. Отв. $y = x^2 (e^x - e)$.
26. $x \frac{dy}{dx} + y = 3$; $x = 1, y = 0$. $xy = 3(x-1)$.
27. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \sec x$; $x = 0, y = 0$. $y = \sin x$.
28. $x \frac{dy}{dx} + y = x + 1$; $x = 2, y = 3$. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1$.

29. Найти уравнение кривой, тангенс наклона которой во всякой точке равен $y + 2x$ и которая проходит через начало координат.

Отв. $y = 2(e^x - x - 1)$.

30. Найти уравнение кривой, тангенс наклона которой во всякой точке равен $xy(x^2 y^2 - 1)$ и которая проходит через точку $(0, 1)$.

Отв. $y^2 = \frac{1}{x^2 + 1}$.

107. Два специальных типа дифференциальных уравнений высшего порядка.

Первый тип. Встречается часто:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X, \quad (E)$$

где X есть непрерывная функция одного x , или константа.

Чтобы интегрировать его, умножим сперва обе его части на dx . Интегрируя, находим:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{dx^n} dx = \int X dx - C_1.$$

Дальше мы повторяем этот процесс $n - 1$ раз. Тогда у нас получится общее решение, содержащее n произвольных постоянных.

Пример. Решить $\frac{d^3 y}{dx^3} = xe^x$.

Решение. Умножив обе части на dx и интегрируя, получаем:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int xe^x dx + C_1$$

или

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1.$$

Повторяя процесс, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x dx - \int e^x dx + \int C_1 dx,$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} y &= \int xe^x dx - \int 2e^x dx + \int C_1x dx + \int C_2 dx + C_3 = \\ &= xe^x - 3e^x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3. \end{aligned}$$

Окончательно

$$y = xe^x - 3e^x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Второй тип имеет очень большое значение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y, \quad (F)$$

где Y есть непрерывная функция одного y .

Чтобы интегрировать, поступаем следующим образом.

Пишем сначала равенство

$$dy' = Y dx$$

и умножаем обе его части на y' . Получаем:

$$y' dy' = Y y' dx.$$

Но $y' dx = dy$; поэтому имеем:

$$y' dy' = Y dy.$$

Переменные y и y' теперь отделены. Интегрируя, находим

$$\frac{1}{2} y'^2 = \int Y dy + C_1.$$

В правой части этого равенства стоит функция буквы y . Извлекая из обеих частей корень квадратный, мы можем отделить переменные x и y и снова интегрировать в последний раз. Это и будет искомым решением.

Следующий пример показывает применение метода.

Пример. Решить $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$.

Решение. Здесь $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 y$. Уравнение принадлежит к типу (F). Умножив обе части на y' dx , поступая, как выше было указано, мы имеем:

$$y' dy' = -a^2 y dy.$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{2} y'^2 = -\frac{1}{2} a^2 y^2 + C; \quad y' = \sqrt{2C - a^2 y^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - a^2 y^2},$$

где $C_1 = 2C$, причем радикал берется с положительным знаком. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - a^2 y^2}} = dx.$$

Интегрируем еще раз:

$$\frac{1}{a} \arcsin \frac{ay}{\sqrt{C_1}} = x + C_2, \quad \text{т. е.} \quad \arcsin \frac{ay}{\sqrt{C_1}} = ax + aC_2.$$

Но это равенство равносильно, как мы знаем из определения обратных тригонометрических (круговых) функций, равенству:

$$\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = \sin a(x + C_2) = \sin ax \cos aC_2 + \cos ax \sin aC_2.$$

Значит, имеем:

$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{a} \cos aC_2 \cdot \sin ax + \frac{\sqrt{C_1}}{a} \sin aC_2 \cdot \cos ax.$$

Отсюда окончательно,

$$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax.^1$$

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d^2 x}{dt^2} = t^2.$

Отв. $x = \frac{t^4}{12} + C_1 t + C_2.$

2. $\frac{d^2 x}{dt^2} = x.$

$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$

¹ Ниже, на стр. 288, показано другое, более простое решение этого уравнения; предлагаем учащимся сравнить два возможных способа решения.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \sin 2t$. Отв. $x = -\sin 2t + C_1 t + C_2$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}$. $x = \frac{e^{2t}}{4} + C_1 t + C_2$.
5. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{(s+1)^3}$. $C_1 (s+1)^2 = (C_1 t + C_2)^2 + 1$.
6. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{as}}$. $3t = 2a^{\frac{1}{4}} (s^{\frac{1}{2}} - 2C_1) (s^{\frac{1}{2}} + C_1)^{\frac{1}{2}} + C_2$.
7. $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a}{y^3}$. $C_1 y^2 = a + (C_1 t + C_2)^2$.
8. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2}{y^2} = 0$. Отв. $\sqrt{C_1 y^2 + y} - \frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln(\sqrt{C_1 y} + \sqrt{1 + C_1 y}) =$
 $= a C_1 x \sqrt{2} + C_2$.
9. $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{s^2} = 0$. Найти t , зная, что $s = a$ и $\frac{ds}{dt} = 0$, когда $t = 0$.
- Отв. $t = -\sqrt{\frac{a}{2k}} \left\{ \sqrt{as - s^2} + a \arcsin \sqrt{\frac{a-s}{a}} \right\}$.
10. $\frac{d^3y}{dx^3} = x + \sin x$. 11. $\frac{d^2s}{dt^2} = a \cos nt$. 12. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$.

§ 108. Случай понижения порядка. Укажем несколько случаев, когда дифференциальное уравнение допускает, после надлежащих преобразований, понижение порядка.

Случай 1. Когда дифференциальное уравнение не содержит самой неизвестной функции y , а только x и производные y' , y'' , ..., его можно заменить другим, порядка на единицу ниже.

В самом деле, имея дифференциальное уравнение $\Phi(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее буквы y , мы можем рассматривать как неизвестную функцию не букву y , а величину y' . Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{d^2y'}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^{n-1}y'}{dx^{n-1}}.$$

Следовательно, имеем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции y' уже не порядка n , а порядка $n-1$.

А когда мы сумеем найти эту новую неизвестную функцию y' , выраженную через x , то само y получается уже одной квадратурой (т. е. взятием одного неопределенного интеграла).

Пример. Найти кривую, кривизна которой равна заданной функции $\varphi'(x)$ абсциссы.

Решение. Приравнивая функции $\varphi(x)$ выражение кривизны [см. часть I, § 130, формула (1)], получаем дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi'(x).$$

В этом уравнении нет самой неизвестной функции y . Поэтому его порядок 2 можно понизить на одну единицу, взяв за неизвестную функцию y' . Таким образом, имеем:

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi'(x) dx.$$

Отсюда, интегрируя один раз и называя через c произвольное постоянное, находим:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \varphi(x) + c.$$

Решая алгебраически это уравнение относительно неизвестной y' , получаем:

$$y' = \frac{\varphi + c}{\sqrt{1 - (\varphi + c)^2}}.$$

Значит,

$$dy = \frac{(\varphi + c) dx}{\sqrt{1 - (\varphi + c)^2}}.$$

Отсюда неизвестная функция y получается при помощи одной квадратуры:

$$y = \int \frac{(\varphi + c) dx}{\sqrt{1 - (\varphi + c)^2}} + C,$$

где C есть вторая произвольная постоянная, как это и должно быть, ибо дифференциальное уравнение, определяющее неизвестную функцию, есть второго порядка.

Случай 2. Когда дифференциальное уравнение не содержит явным образом независимого переменного x , всегда можно заметить это уравнение другим, порядка на единицу ниже.

В самом деле, пусть

$$\Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

данное уравнение. Так как

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

то:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dy} \left(y' \frac{dy'}{dy} \right) \cdot y' = \frac{d^2y'}{dy^2} y'^2 + \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 y', \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{d}{dy} \left[\frac{d^2y'}{dy^2} y'^2 + \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2 y' \right] \cdot y' = \dots \end{aligned}$$

Мы замечаем, что, беря за неизвестную функцию y' , а букву y за независимое переменное, мы понижаем порядок уравнения на одну

единицу, так что теперь предложенное уравнение напишется уже в виде:

$$F\left(y, y', \frac{dy'}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}y'}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Когда же мы найдем y' в функции буквы y , т. е.

$$y' = \varphi(y),$$

то разделением переменных получим и y , ибо из

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

следует, что

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y)}$$

и, значит:

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

Пример. Найти кривую, радиус кривизны которой пропорционален нормали.

Решение. Взяв выражение радиуса кривизны R [см. часть I, § 133, формула (7)], $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, взяв выражение длины нормали в виде $y\sqrt{1 + y'^2}$ и обозначив через постоянное n коэффициент пропорциональности, мы получаем дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = ny\sqrt{1 + y'^2}$$

или, короче:

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = ny. \quad (1)$$

Это уравнение не содержит буквы x . Согласно указанному правилу, мы полагаем $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y'$.

Поэтому дифференциальное уравнение напишется в виде

$$1 + y'^2 = ny y' \frac{dy'}{dy}$$

или, короче:

$$n \frac{y' dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя и называя через c произвольное постоянное, находим:

$$\frac{n}{2} \ln(1 + y'^2) = \ln cy,$$

т. е.

$$cy = (1 + y'^2)^{\frac{n}{2}}. \quad (1)$$

Здесь можно было бы поступить согласно указанному правилу, т. е. сначала определить из этого уравнения y' в функции буквы y и далее интегрировать полученное равенство разделением переменных, как это рекомендуется в тексте. Но проще поступить так: дифференцировать написанное равенство:

$$cy' dx = ny' (1 + y'^2)^{\frac{n}{2}-1} dy',$$

упростить

$$c dx = n (1 + y'^2)^{\frac{n}{2}-1} dy'$$

и интегрировать

$$cx = n \int (1 + y'^2)^{\frac{n}{2}-1} dy'. \quad (2)$$

Это равенство (2), после выполнения написанной квадратуры, вводящей второе произвольное постоянное C , дает прямое выражение буквы x через букву y' .

Сопоставляя вместе полученные равенства (1) и (2) и исключая из них букву y' , мы имеем окончательное взаимоотношение букв y и x , вместе с двумя произвольными постоянными c и C , каким оно и должно быть, потому что основное дифференциальное уравнение (1) кривой есть уравнение второго порядка.

Если коэффициент пропорциональности n есть число *целое*, уравнение (2) всегда дает x выраженным в букве y' посредством алгебраических или логарифмических функций (включая сюда и \arctg). Наиболее интересными случаями являются такие:

1) $n = 1$. Имеем тогда из уравнения (2)

$$cx = \ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}). \quad (2)$$

Мы не пишем постоянного C , ибо введение его приводит только к преобразованию координат. Исключение же буквы y' из уравнений (1) и (2) дает

$$cy = \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2}.$$

Эта кривая есть *цепная линия*.

2) $n = -1$. Имеем тогда из уравнения (2):

$$cx = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (2)$$

опустив C по указанной выше причине. Исключение y' из (1) и (2) дает

$$cx^2 + cy^2 = 1,$$

т. е. *окружность*.

3) $n = 2$. Имеем из уравнения (2)

$$cx = 2y'. \quad (2)$$

Исключение y' из (1) и (2) дает

$$cy = 1 + \frac{c^2 x^2}{4},$$

т. е. *параболу*.

4) $n = -2$. Полагая $y' = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ и $\frac{1}{c} = 2a$, имеем из уравнения (2)

$$x = -a (\sin \varphi + \varphi). \quad (2)$$

А из уравнения (1) имеем:

$$y = a(1 + \cos \varphi). \quad (1)$$

Изменяя φ на $\pi - \varphi$, а также $x + a\pi$ на x , мы имеем окончательно:

$$y = a(1 - \cos \varphi), \quad x = a(\varphi - \sin \varphi).$$

Это есть *циклоида*.

Таким образом, самые разнообразные классические кривые получаются изменением только численных значений *целого* n и, значит, фактически они обладают *одним и тем же геометрическим свойством*.

Случай 3. Когда уравнение однородно относительно y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., можно понизить его порядок.

Для этого достаточно положить

$$y = e^{\int z dx}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\int z dx} \cdot z, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot \frac{dz}{dx}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Если внести эти выражения в предложенное уравнение, тогда всякий член уравнения получит множителем $e^{\int z dx}$ в степени, *равной степени однородности уравнения*. Вынося этот общий множитель за уравнение и зачеркивая его, ибо он не может уничтожаться, мы получаем новое дифференциальное уравнение относительно буквы z . И так как производная $\frac{d^k y}{dx^k}$ выражается через производные буквы z по x порядка не выше $k - 1$, то новое дифференциальное уравнение будет иметь порядок, меньший порядка данного уравнения.

Пример. Понизить порядок уравнения $xyu'' + xy'^2 - uu' = 0$.

Решение. Так как уравнение однородно относительно букв y , y' и y'' , то, согласно общему правилу, полагая $y = e^{\int z dx}$, находим: $y' = e^{\int z dx} \cdot z$ и $y'' = e^{\int z dx} z^2 + e^{\int z dx} \cdot z'$. Отсюда, подставляя выражения букв y , y' и y'' в предложенное уравнение, находим:

$$xe^{\int z dx} \left(e^{\int z dx} z^2 + e^{\int z dx} z' \right) + xe^{\int z dx} z^2 - e^{\int z dx} z = 0.$$

После сокращения множителя $e^{\int z dx}$ имеем:

$$x(z^2 + z') + xz^2 - z = 0.$$

Это есть уравнение уже *первого* порядка и, следовательно, мы понизили порядок первоначального уравнения на одну единицу.

Легко, впрочем, до конца проинтегрировать предложенное уравнение. В самом деле, заметив, что $(yy')' = yy'' + y'^2$, мы можем предложенное уравнение переписать в виде $x(yy')' = yy'$. Отсюда, полагая $yy' = u$, имеем $xu' = u$.

Следовательно, $\frac{u'}{u} = \frac{1}{x}$, т. е. $(\ln u)' = \frac{1}{x}$. Интегрируя, находим $\ln u = \ln x + \ln c$, где c есть произвольное постоянное. Поэтому $u = cx$. Подставив найденную функцию u в уравнение $uu' = u$, имеем $uu' = cx$. Отсюда $2uu' = 2cx$, т. е. $(u^2)' = 2cx$. Новое интегрирование дает $u^2 = cx^2 + C$, где C есть второе произвольное постоянное. Окончательно, мы имеем $y = \sqrt{cx^2 + C}$.

§ 109. Форма общего интеграла линейного однородного уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0, \quad (I)$$

где p и q суть непрерывные функции одного только x (в частности могут быть постоянными величинами), называется *линейным однородным* уравнением второго порядка, или еще иначе: «*уравнением без правой части*».

Если же в правой части уравнения, вместо нуля, стоит какая-нибудь непрерывная функция X одного только x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = X, \quad (II)$$

тогда такое уравнение называется *неоднородным* линейным уравнением второго порядка, или еще иначе: «*уравнение с правой частью*».

Нашей целью является теперь отыскание формы общего интеграла однородного уравнения.

Для этого мы опираемся на следующее предложение¹, не имеющее никаких исключений, которое мы возводим в принцип при указанном отыскании:

если коэффициенты p и q однородного уравнения оба суть непрерывные функции от x на отрезке $[a, b]$, тогда всякое частное решение $y(x)$ этого уравнения обязано быть непрерывным на $[a, b]$.

Для отыскания формы общего решения возьмем заранее определенное, хотя и не важно, какое, частное решение $y_1(x)$ однородного уравнения, не тождественное нулю. Пусть $y_1(x_0) \neq 0$, где x_0 фиксированная точка отрезка $[a, b]$.

Обозначая через $y(x)$ произвольное частное решение однородного уравнения, мы имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + p \frac{dy_1}{dx} + qy_1 = 0. \quad (2)$$

¹ Доказательство его содержится в более обширных курсах анализа.

Умножая тождества (1) на y_1 и (2) на y , потом вычитая, имеем:

$$\frac{y_1 d^2 y - y d^2 y_1}{dx^2} + p \cdot \frac{y_1 dy - y dy_1}{dx} = 0. \quad (3)$$

Полагая

$$\frac{y_1 dy - y dy_1}{dx} = z, \quad (4)$$

мы видим, что (3) переписывается в виде:

$$\frac{dz}{dx} + p \cdot z = 0.$$

Отсюда отделение переменных нам дает:

$$z = C_2 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p dt}, \quad (5)$$

где C_2 — произвольное постоянное.

С другой стороны, равенство (4) переписывается в виде:

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot \left(-\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} \right) = \frac{z}{y_1}. \quad (6)$$

Это есть *линейное* уравнение первого порядка относительно буквы y , а все другие буквы: y_1 и z нам уже известны. Поэтому, применив к (6) правило интегрирования линейных уравнений первого порядка (§ 106, тип III), мы находим выражение:

$$y = e^{\int_{x_0}^x \frac{dy_1}{y_1}} \left(\int_{x_0}^x \frac{z}{y_1} \cdot e^{-\int_{x_0}^t \frac{dy_1}{y_1}} dt + C_1 \right), \quad (7)$$

где C_1 есть произвольное постоянное. Это выражение очень упрощается после вычисления интеграла

$$\int_{x_0}^x \frac{dy_1}{y_1} = \ln y_1(x) - \ln y_1(x_0) = \ln \frac{y_1(x)}{y_1(x_0)}$$

и внесения его величины в выражение (7). В самом деле, мы получаем:

$$y = y_1 \left(\int_{x_0}^x \frac{z}{y_1^2} dt + C_1 \right).$$

Внося же сюда выражение буквы z по формуле (5), мы получаем окончательно:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{t_0}^t p(\alpha) d\alpha}}{y_1^2(t)} dt. \quad (8)$$

Таким образом, *общий интеграл однородного уравнения второго порядка пишем в виде*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (9)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных решения этого однородного уравнения, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные¹.

При этом важно отметить, что первое частное решение $y_1(x)$ взято не уничтожающимся в точке x_0 , ибо мы имели неравенство $y_1(x_0) \neq 0$. А второе частное решение:

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{t_0}^t p(\alpha) d\alpha}}{y_1^2(t)} dt, \quad (10)$$

наоборот, уничтожается в точке x_0 , ибо интеграл между равными пределами равен нулю.

Для того, чтобы самый смысл этого замечания стал ясен, введем важное определение.

Определение. Два какие-нибудь частных решения Y_1 и Y_2 однородного уравнения называются линейно независимыми друг от друга, если они не могут дать тождества $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \equiv 0$, где a_1 и a_2 суть постоянные, не равные оба вместе нулю.

Ясно, что из *обоих линейно независимых решений* Y_1 и Y_2 ни одно не может быть тождественным нулю, ибо если, например, $Y_1 \equiv 0$, то будем иметь и тождество $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \equiv 0$, где $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$.

Если Y_1 и Y_2 суть линейно зависимые решения, то из тождества $a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \equiv 0$, где, например, $a_2 \neq 0$, мы выводим очевидное тождество $Y_2 \equiv -\frac{a_1}{a_2} Y_1$ и, значит, из *двух линейно зависимых решений одно получается из другого умножением на постоянную величину*.

В свете данного определения рассмотренные выше частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть *линейно независимые решения*, ибо одно из них уничтожается в точке x_0 , $y_2(x_0) = 0$, а другое заведомо отлично от нуля, $y_1(x_0) \neq 0$. Поэтому, никакое из них не выводится из другого умножением на постоянную величину.

¹ Что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения, это ясно без дальнейшего, ибо $y_1(x)$ взято таковым. А что $y_2(x)$ есть тоже частное решение однородного уравнения, это ясно из того, что при *всяких* численных значениях постоянных C_1 и C_2 формула (9) всегда дает частное решение однородного уравнения, и, значит, также при $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$, когда получается выше $y_2(x)$.

Теорема I. *Общее решение однородного уравнения пишется в виде $C_1 Y_1 + C_2 Y_2$, где Y_1 и Y_2 суть два любые линейно независимые между собой частные решения, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные.*

Так как Y_1 нетождественно нулю, мы полагаем $y_1(x) \equiv Y_1(x)$. С другой стороны, мы имеем тождество

$$Y_2(x) = C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x),$$

где C_1^* и C_2^* суть вполне определенные постоянные.

Но постоянное C_2^* заведомо отлично от нуля, так как в противном случае мы имели бы тождество $Y_2(x) \equiv C_1^* y_1(x)$, т. е. $Y_2(x) \equiv C_1^* Y_1(x)$, что невозможно, ибо Y_1 и Y_2 линейно независимы друг от друга.

Итак, обязательно $C_2^* \neq 0$ и поэтому имеем:

$$y_2(x) \equiv -\frac{C_1^*}{C_2^*} Y_1(x) + Y_2(x). \quad (11)$$

Подставляя в выражение $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ общего интеграла вместо $y_1(x)$ функцию $Y_1(x)$ и вместо $y_2(x)$ формулу (11), мы получаем для общего интеграла однородного уравнения выражение вида

$$C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x),$$

где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные.

ч. т. д.

Теорема II. *Если $y_1(x)$ есть какое-нибудь частное решение, нетождественное нулю, то уравнение $y_1(x) = 0$ не может иметь кратных корней, но имеет лишь простые корни.*

В самом деле, если $y_1(x)$ и $y(x)$ суть два какие-нибудь линейно независимые частные решения однородного уравнения, мы имеем, в силу формул (4) и (5), тождество

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} \equiv C_2 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}, \quad (12)$$

где постоянное C_2 обязано быть отличным от нуля.

Действительно, если бы $C_2 = 0$, мы имели бы $y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} \equiv 0$, т. е. $\frac{dy}{y} = \frac{dy_1}{y_1}$, откуда $y = C y_1$, где C — постоянное; значит, решения y_1 и y были бы линейно зависимы.

Итак, в формуле (12) постоянное $C_2 \neq 0$. Теперь, если бы какое-нибудь число ξ оказалось кратным корнем уравнения $y_1(x) = 0$, тогда и сама функция y_1 и ее производная $\frac{dy_1}{dx}$ уничтожились бы,

когда $x = \xi$. А тогда в формуле (12) мы обязаны были бы иметь $C_2 = 0$, что невозможно. ч. т. д.

Теорема III. *Никакие два линейно независимые решения $y_1(x)$ и $y(x)$ однородного уравнения не могут уничтожаться в одной и той же точке.*

В самом деле, если бы ξ было общим корнем обоих уравнений $y_1(x) = 0$ и $y(x) = 0$, тогда в точке ξ мы имели бы $y_1 = 0$ и $y = 0$ и, значит, опять формула (12) нам дала бы $C_2 = 0$, что невозможно. ч. т. д.

Теорема IV. *Между двумя соседними корнями уравнения $y_1(x) = 0$ содержится один и только один корень уравнения $y(x) = 0$. Иначе говоря, точки уничтожения двух линейно независимых частных решений y_1 и y взаимно отделяются.*

В самом деле, возьмем два соседние корня α_1 и β_1 уравнения $y_1(x) = 0$. Геометрически это означает, что течение функции $y_1(x)$ между корнями α_1 и β_1 изображается непрерывной дугой D_1 , опирающейся своими концами на точки α_1 и β_1 и не пересекающей между ними оси OX . Значит, дуга D_1 лежит вся по одну только сторону этой оси (на рис. 108 выше ее). К тому же касательная в точке M ,

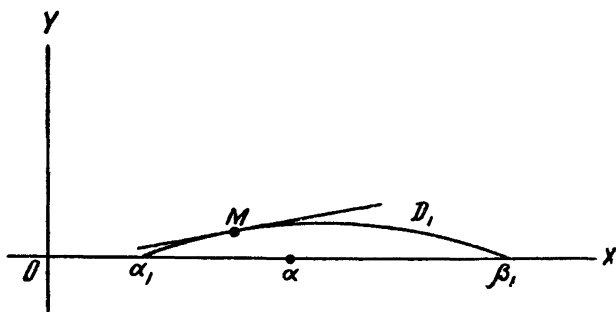


Рис. 108

когда M описывает непрерывно дугу D_1 , вращается также непрерывно, образуя острый угол с осью OX в концевой точке α_1 и, наоборот, тупой угол в концевой точке β_1 . Это означает, что производная $\frac{dy_1}{dx}$ имеет разные знаки в концах отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$.

Сама же функция $y_1(x)$ в концах этого отрезка уничтожается, т. е. имеем $y_1(\alpha_1) = 0$ и $y_1(\beta_1) = 0$.

Обратимся теперь к тождеству (12). Правая его часть не может переменить знака и поэтому сохраняет всюду на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$ свой знак (т. е. знак постоянного C_2). В частности, правая часть тождества (12) имеет один и тот же знак в концах отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$.

В левой же части тождества (12) уменьшаемое $y_1 \frac{dy}{dx}$ уничтожается

в концах этого отрезка. Значит, вычитаемое $-y \frac{dy_1}{dx}$ должно сохранять знак. А так как второй его множитель $\frac{dy_1}{dx}$ заведомо имеет в концах отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$ разные знаки, то отсюда следует, что и первый его множитель $y(x)$ также обязан иметь в концах отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$ разные знаки и, значит, будучи непрерывной функцией, $y(x)$ обращается в нуль в некоторой точке α , лежащей внутри отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$. Таким образом, между двумя соседними корнями α_1 и β_1 уравнения $y_1(x) = 0$ лежит корень α уравнения $y(x) = 0$. И он там имеется только один, потому что, если бы их там было несколько, то между двумя соседними корнями уравнения $y(x) = 0$ лежал бы корень и уравнения $y_1(x) = 0$, что невозможно, ибо *внутри* отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$ это уравнение не может иметь корней. ч. т. д.

Пример. Однородное уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ имеет общий интеграл $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Частные решения $\sin x$ и $\cos x$ линейно независимы. Поэтому точки, где $\sin x$ уничтожается, т. е. точки $x = k\pi$, k целое, и точки, где $\cos x = 0$, т. е. точки $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, попарно чередуются, взаимно отделяя друг друга.

Теорема V. Однородное уравнение всегда можно привести к виду, называемому каноническим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - Gy = 0,$$

где G есть функция только буквы x .

В самом деле, взяв однородное уравнение (1) и сделав подстановку $y = uv$, мы находим:

$$u \frac{d^2v}{dx^2} + \left(2 \frac{du}{dx} + pu\right) \frac{dv}{dx} + v \left(\frac{d^2u}{dx^2} + p \frac{du}{dx} + qu\right) = 0. \quad (13).$$

Выбирая теперь функцию u так, чтобы иметь

$$2 \frac{du}{dx} + pu = 0,$$

для чего достаточно взять

$$u = e^{-\int \frac{p}{2} dx},$$

мы видим, что для функции $v(x)$ уравнение (13) получает канонический вид. ч. т. д.

Теорема VI. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка всегда можно привести к интегрированию

нелинейного уравнения первого порядка, называемого уравнением Риккати,

$$z' + z^2 + pz + q = 0.$$

В самом деле, делая в однородном уравнении (1) подстановку $y = e^{\int z dx}$, где z — неизвестная функция, причем $y' = e^{\int z dx} \cdot z$, $y'' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z'$, и, сокращая неунуляющийся множитель $e^{\int z dx}$, мы получаем искомое уравнение Риккати:

$$z' + z^2 + pz + q = 0. \quad (14)$$

ч. т. д.

Вообще, уравнением Риккати называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R, \quad (15)$$

где P , Q и R зависят только от x . Это уравнение, хотя и первого порядка, но нелинейное, потому что здесь содержится член с y^2 . Подстановкой $y = -\frac{z}{P}$ оно, очевидно, приводится к виду (14).

Уравнение Риккати обладает рядом весьма важных свойств, как в теоретическом отношении (аналитическая теория дифференциальных уравнений), так и в практическом отношении (механика железнодорожного транспорта). Уравнение Риккати, к сожалению, нельзя проинтегрировать в общем виде, но оно послужило первой моделью, на которой был открыт и с успехом испробован акад. С. А. Чаплыгиным его известный метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений¹.

Общий интеграл уравнения Риккати имеет вид:

$$y = \frac{f_1 + Cf_2}{f_3 + Cf_4}, \quad (16)$$

где C — произвольное постоянное, а f_1 , f_2 , f_3 и f_4 некоторые определенные функции буквы x , которые, к сожалению, нельзя получить квадратурами.

Доказанная теорема I о линейных однородных дифференциальных уравнениях *второго порядка* распространяется без всяких ограничений на уравнения *n-го порядка*, а именно,

¹ С. А. Чаплыгин, Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда, 1919. «О методе приближенного интегрирования», ЦАГИ, 1932. См. также Б. Н. Петров, О границах применимости теоремы акад. С. А. Чаплыгина (§ 3 «Защитное уравнение Риккати»), ДАН, 1946.

общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (17)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n суть непрерывные функции одного x , имеет вид

$$y = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x), \quad (18)$$

Y_1, Y_2, \dots, Y_n суть частные решения уравнения (17), связанные только тем условием, чтобы ни одно из них не оказалось линейной комбинацией других, т. е. чтобы между ними не было тождественного соотношения

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n = 0$$

при коэффициентах c_i , отличных от нуля. Такие частные решения Y_1, Y_2, \dots, Y_n называются независимыми.

§ 110. Уравнения с правой частью. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = X, \quad (II)$$

где p, q и X суть непрерывные функции одного x , получается так: сначала ищут какое-нибудь частное решение $y^*(x)$ неоднородного уравнения (II)

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} + p \frac{dy^*}{dx} + qy^* = X \quad (1)$$

и затем вычитают из уравнения (II) равенство (1).

Имеем:

$$\frac{d^2 (y - y^*)}{dx^2} + p \frac{d(y - y^*)}{dx} + q(y - y^*) = 0. \quad (2)$$

Это есть *однородное* уравнение второго порядка, ибо, обозначая разность $y - y^*$ через Y , мы имеем:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + p \frac{dY}{dx} + qY = 0. \quad (1)$$

Мы видели, что общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2, \quad (3)$$

где Y_1, Y_2 суть два частных линейно независимых решения однородного уравнения (1).

Так как, с другой стороны, $Y = y - y^*$, то имеем:

$$y - y^* = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$$

и окончательно:

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + y^*. \quad (4)$$

Отсюда получается предложение:

общее решение уравнения с правой частью $y'' + py' + qu = X$ имеет вид $y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + y^$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, y^* — какое-нибудь частное решение уравнения с правой частью, а Y_1, Y_2 — два линейно независимых частных решения уравнения без правой части.*

Это предложение расширяется на линейные уравнения любого порядка с правой частью:

общее решение уравнения с правой частью

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p y = X,$$

где p_i и X суть непрерывные функции одного x , имеет вид $y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n + y^$, где y^* — какое-нибудь частное решение уравнения с правой частью, а $C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$ — общее решение уравнения без правой части.*

§ 111. Метод Лагранжа изменения постоянных. Этот метод изобретен для отыскания частного решения y^* уравнения с правой частью, когда известно общее решение уравнения без правой части

Пусть имеем уравнение с правой частью:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = X \quad (II)$$

и пусть

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 \quad (I)$$

общее решение уравнения без правой части

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0. \quad (I)$$

Метод разыскания частного решения y^* уравнения (II) состоит в том, что на C_1, C_2 мы перестаем смотреть как на постоянные и, предполагая их функциями от x , ищем определить их так, чтобы искомое частное решение y^* было бы дано формулой

$$y^* = C_1 Y_1 + C_2 Y_2. \quad (1^*)$$

Дифференцируя два раза это равенство, имеем:

$$\frac{dy^*}{dx} = (C'_1 Y_1 + C'_2 Y_2) + (C_1 Y'_1 + C_2 Y'_2), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = (C''_1 Y_1 + C''_2 Y_2) + 2(C'_1 Y'_1 + C'_2 Y'_2) + (C_1 Y''_1 + C_2 Y''_2). \quad (3)$$

До сих пор мы не налагали на функции C_1, C_2 никаких ограничений. Предположим теперь, что их производные C'_1, C'_2 удовлетворяют системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 Y_1 + C'_2 Y_2 &= 0, \\ C'_1 Y'_1 + C'_2 Y'_2 &= X. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Дифференцируя первое уравнение этой системы, мы имеем

$$(C_1'' Y_1 + C_2'' Y_2) + (C_1' Y_1' + C_2' Y_2') = 0. \quad (5)$$

Приняв во внимание равенства (4) и (5), легко видеть, что уравнения (1'), (2) и (3) переписутся так:

$$\left. \begin{aligned} y^* &= C_1 Y_1 + C_2 Y_2, \\ \frac{dy^*}{dx} &= C_1 Y_1' + C_2 Y_2', \\ \frac{d^2 y^*}{dx^2} &= C_1 Y_1'' + C_2 Y_2'' + X. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Умножив первое уравнение этой системы на q , второе на p , третье на 1 и сложив, мы имеем

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} + p \frac{dy^*}{dx} + q y^* = X, \quad (7)$$

ибо должны иметь $Y_1'' + p Y_1' + q Y_1 = 0$ и $Y_2'' + p Y_2' + q Y_2 = 0$, потому что Y_1 и Y_2 суть решения уравнения без правой части.

Уравнение (7) показывает, что функция y^* , определенная равенством (1'), в самом деле является частным решением уравнения (II) с правой частью, если производные C_1' , C_2' функций C_1 , C_2 удовлетворяют системе алгебраических уравнений (4).

Решая эти уравнения, мы находим:

$$C_1' = -\frac{X}{Y_1 \left(\ln \frac{Y_2}{Y_1} \right)'} \quad \text{и} \quad C_2' = \frac{X}{Y_2 \left(\ln \frac{Y_2}{Y_1} \right)'}, \quad (8)$$

и, далее, двумя квадратурами получаем C_1 и C_2 .

§ 112. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнения без правой части. Возьмем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q y = 0, \quad (G)$$

где p и q суть постоянные.

В целях иметь частное решение уравнения (G), мы пробуем найти такое постоянное r , чтобы (G) было удовлетворено функцией

$$y = e^{rx}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1), мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = r e^{rx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (G) величины (1) и (2) и сокращая на неунуляющийся множитель e^{rx} , мы получаем

$$r^2 + pr + q = 0 \quad (3)$$

квадратное уравнение, дающее искомое постоянное r . Его корни и суть нужные нам значения постоянной r .

Уравнение (3) называется *вспомогательным* или *характеристическим уравнением для уравнения* (G).

1. Если корни r_1 и r_2 характеристического уравнения (3) различны, тогда

$$Y_1 = e^{r_1 x} \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{r_2 x} \quad (4)$$

являются двумя частными линейно независимыми решениями уравнения (G).

Отсюда следует, что *общим решением уравнения* (G) *в этом случае будет:*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad r_1 \neq r_2. \quad (5)$$

Пример 1. Решить $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение есть $r^2 - 2r - 3 = 0$. Его корни суть $+3$ и -1 . Поэтому общее решение предложенного уравнения есть

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Когда корни r_1, r_2 характеристического уравнения (3) действительны и различны, общее решение (5) уравнения (G) есть решение *окончательное*.

Когда же корни r_1, r_2 характеристического уравнения (3) суть комплексные числа, тогда общее решение (5) уравнения (G) надо немного преобразовать, чтобы оно могло быть применено к задачам естествознания и техники.

Так как коэффициенты p, q дифференциального уравнения (G) суть действительные, то комплексные корни r_1, r_2 квадратного уравнения (3) суть сопряженные, т. е. имеющие вид

$$r_1 = a + bi \quad \text{и} \quad r_2 = a - bi. \quad (6)$$

Поэтому, при *действительном* x , по формуле Эйлера (§ 101), имеем:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} e^{r_1 x} &= e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{bxi} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ e^{r_2 x} &= e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bxi} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Отсюда общее решение (5) получит вид:

$$y = e^{ax} [(C_1 + C_2) \cos bx + i(C_1 - C_2) \sin bx]. \quad (8)$$

Введя же обозначения: $c_1 = C_1 + C_2$ и $c_1 = i(C_1 - C_2)$, мы можем написать общее решение уравнения (G) в виде

$$y = e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx), \quad (9)$$

где c_1 и c_2 суть *произвольные* постоянные. Из этой формы общего решения следует, что

$$Y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad Y_2 = e^{ax} \sin bx \quad (10)$$

суть два действительные частные линейно независимые решения уравнения (G) и что общим *действительным* решением уравнения (G) будет

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \quad (11)$$

где C_1 и C_2 суть *действительные произвольные постоянные*.

Пример 2. Решить $\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение есть $r^2 + k^2 = 0$. Его корни: $r_1 = ik$, $r_2 = -ik$. Поэтому, сравнивая с (6), имеем $a = 0$, $b = k$. Значит, в силу (11), общее решение есть

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

II. Если корни r_1 и r_2 характеристического уравнения (3) равны, то тогда они обязательно действительны и оба равны $r = -\frac{p}{2}$. В этом случае

$$Y_1 = e^{rx} \quad \text{и} \quad Y_2 = x e^{rx}, \quad r = -\frac{p}{2} \quad (12)$$

являются двумя частными линейно независимыми решениями уравнения (G).

Следовательно, *общим решением уравнения (G) в этом случае будет*

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \quad r = -\frac{p}{2}. \quad (13)$$

Чтобы все это доказать, напомним выражение корней квадратного уравнения (3): $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Следовательно, корни равны друг другу тогда и только тогда, когда $\frac{p^2}{4} = q$. И в этом случае имеем: $r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$. Таким образом, первым частным решением уравнения (G) будет:

$$Y_1 = e^{rx}, \quad r = -\frac{p}{2}. \quad (14)$$

Индуктивно можно прийти ко второму частному решению Y_2 так: когда корни r_1 и r_2 характеристического уравнения (3) не равны, имеем два частных решения уравнения (G): $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$. Отношение $\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}$ также есть частное решение уравнения (G). Но по теореме Лагранжа отношение

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ в точности равно производной $f'(c)$ для промежуточного c , $a < c < b$. Полагая $f(r) = e^{rx}$, $a = r_1$, $b = r_2$, мы имеем $\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1} = \left[\frac{de^{rx}}{dr} \right]_{r=r^*}$, где r^* промежуточное между r_1 и r_2 . Так как $\frac{de^{rx}}{dr} = xe^{rx}$, то имеем равенство:

$$\frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1} = xe^{r^*x}, \quad (15)$$

причем выражение, стоящее направо, есть частное решение допределенного уравнения (G) с корнями r_1 и r_2 своего характеристического уравнения. Заставляя оба этих корня стремиться к одному и тому же пределу r , т. е. полагая $r_1 \rightarrow r$ и одновременно с этим $r_2 \rightarrow r$, мы в пределе получаем характеристическое уравнение (3) с двумя корнями, равными числу r , $r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$. И так как r^* содержится между r_1 и r_2 , когда они еще не совпадали в пределе, то необходимо $r^* \rightarrow r$. Следовательно, частное решение (15) допределенного уравнения (G) станет в пределе

$$xe^{rx}, \text{ где } r = -\frac{p}{2}, \quad (16)$$

и естественно думать, что оно явится частным решением предельного уравнения (G).

Дедуктивно, решение (12), Y_2 проверяется так: полагаем $Y_2 = xe^{rx}$. Дифференцируем $Y_2' = e^{rx} + rxe^{rx}$, $Y_2'' = 2re^{rx} + r^2xe^{rx}$. Отсюда $Y_2'' + pY_2' + qY_2 = xe^{rx}(r^2 + pr + q) + e^{rx}(p + 2r)$. Но первая скобка есть нуль, ибо r служит корнем характеристического уравнения (3); вторая же скобка есть нуль, ибо $r = -\frac{p}{2}$. Таким образом, Y_2 есть частное решение уравнения (G): ясно при этом, что Y_1 и Y_2 суть решения линейно независимые.

Пример 3. Решить $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0$ и найти такое частное решение, что

$$s = 4 \text{ и } \frac{ds}{dt} = -2 \text{ для } t = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение таково: $r^2 + 2r + 1 = 0$, т. е. $(r + 1)^2 = 0$. Отсюда оба корня его равны -1 . Поэтому, общим будет решение

$$s = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} = e^{-t}(C_1 + C_2t).$$

Для отыскания частного решения, удовлетворяющего двум поставленным условиям, сначала ищем $\frac{ds}{dt}$. Имеем: $\frac{ds}{dt} = (C_2 - C_1)e^{-t} - C_2te^{-t}$. Полагая

$t = 0$ в формулах для s и для $\frac{ds}{dt}$, получаем: $s(0) = C_1$ и $\left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=0} = C_2 - C_1$.

Значит: $C_1 = 4$ и $C_2 - C_1 = -2$. Отсюда $C_2 = 2$. Поэтому искомое частное решение есть $s = e^{-t}(4 + 2t)$.

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{d^2s}{dt^2} - 4 \frac{ds}{dt} + 3s = 0.$$

$$\text{Отв. } s = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

$$3. \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}.$$

$$4. \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0.$$

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

$$5. \frac{d^2s}{dt^2} - 9s = 0.$$

$$s = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}.$$

$$6. \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$y = C_1 - C_2 e^{-3x}.$$

$$7. \frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 13x = 0.$$

$$x = e^{2t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t).$$

$$8. \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 8x = 0.$$

$$x = e^{-2t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

$$9. \frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

$$13. \frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0.$$

$$10. \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0.$$

$$14. \frac{d^2s}{dt^2} + 16 \frac{ds}{dt} = 0.$$

$$11. \frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2 \frac{d\rho}{d\theta} + \rho = 0.$$

$$15. \frac{d^2x}{dt^2} - 8 \frac{dx}{dt} + 25x = 0.$$

$$12. \frac{d^2s}{dt^2} - 16s = 0.$$

$$16. \frac{d^2s}{dt^2} + 6 \frac{ds}{dt} + 10s = 0.$$

В следующих примерах отыскать частные решения, которые удовлетворяют данным условиям:

$$17. \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0; \quad x = \frac{1}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{для } t = 0. \quad \text{Отв. } x = \frac{1}{2} e^{2t}.$$

$$18. \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0; \quad y = 3, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{для } x = 0. \quad y = 2e^x + e^{-2x}.$$

$$19. \frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0; \quad s = 6, \quad \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{для } t = 0. \quad s = 3e^{2t} + 3e^{-2t}.$$

$$20. \frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0; \quad s = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 10 \quad \text{для } t = 0. \quad s = 5 \sin 2t.$$

$$21. \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0; \quad y = 4 \quad \text{для } x = 0, \quad y = 0 \quad \text{для } x = \frac{\pi}{2}. \quad y = 4 \cos x.$$

$$22. \frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0; \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{для } x = 0. \quad y = 2xe^{3x}.$$

$$23. \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0; \quad x = 3, \quad \frac{dx}{dt} = -3 \quad \text{для } t = 0. \quad x = 3e^{-t} \cos t.$$

$$24. \frac{d^2s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + 5s = 0; \quad s = 1, \quad \frac{ds}{dt} = 1 \quad \text{для } t = 0. \quad s = e^{-t} (\cos 2t + \sin 2t).$$

$$25. \frac{d^2s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + 2s = 0; \quad s = -1, \quad \frac{ds}{dt} = 3 \quad \text{для } t = 0.$$

26. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = -1$ для $x = 0$.
27. $\frac{d^2s}{dt^2} + n^2s = 0$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = v_0$ для $t = 0$.
28. $\frac{d^2s}{dt^2} - n\frac{ds}{dt} = 0$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = n$ для $t = 0$.
29. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 10$ для $t = 0$.
30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$; $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 3$ для $x = 0$.

Уравнения с правой частью.

Возьмем

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = X, \quad (\text{H})$$

где p и q суть постоянные и X непрерывная функция только x .

Из § 110 мы знаем, что для получения общего решения неоднородного уравнения (H) необходимо сделать три шага.

Первый шаг. Решить однородное уравнение (G). Пусть его общее решение будет

$$y = C_1Y_1 + C_2Y_2. \quad (17)$$

Это общее решение однородного уравнения (G) называется дополнительной функцией для неоднородного уравнения (H).

Второй шаг. Разыскать, путем испытаний, частное решение y^* уравнения (H).

Третий шаг. Общим решением y неоднородного уравнения (H) тогда будет

$$y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + y^*. \quad (18)$$

Наибольший труд представляет шаг второй, чтобы облегчить его, полезно следующее правило (все буквы, кроме буквы x , суть константы).

Правило разыскания частного решения

Общий случай

| форма функции X | | форма решения y^* |
|---------------------------------|-----------|-------------------------------------|
| $X = a + bx$ | вынуждает | $y^* = A + Bx$. |
| $X = ae^{bx}$ | вынуждает | $y^* = Ae^{bx}$. |
| $X = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$ | вынуждает | $y^* = A_1 \cos bx + A_2 \sin bx$. |

Исключения имеют место в нижеследующих специальных случаях.
Специальные случаи.

1. Вынужденную форму надо умножить на x :

1) если $x = 0$ есть простой корень характеристического уравнения, (3) и $X = a + bx$;

2) если $x = b$ есть простой корень характеристического уравнения и $X = ae^{bx}$;

3) если $x = \pm bi$ суть корни характеристического уравнения и $X = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$.

II. Вынужденную форму надо умножить на x^2 , если:

1) $x = 0$ есть двойной корень характеристического уравнения и $X = a + bx$;

2) $x = b$ есть двойной корень характеристического уравнения и $X = ae^{bx}$.

Самый же метод разыскания решения y^* состоит в подстановке указанных выражений для y^* в предложенное неоднородное уравнение (H) и, далее, в определении постоянных A, B, A_1, A_2 так, чтобы уравнение (H) было удовлетворено.

Пример 4. Решить $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2x$.

Решение. Первый шаг. Решаем однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Согласно примеру 1 имеем дополнительную функцию:

$$C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Второй шаг. Так как $x = 0$ не есть корень характеристического уравнения, то $y^* = A + Bx$. Подставляя в предложенное неоднородное уравнение, имеем $-2B - 3A - 3Bx = 2x$. Приравнявая коэффициенты правой и левой частей, находим: $-2B - 3A = 0$ и $-3B = 2$. Отсюда:

$$A = \frac{4}{9}, \quad B = -\frac{2}{3}. \quad \text{Значит: } y^* = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x.$$

Третий шаг.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x.$$

Пример 5. Решить $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{-x}$.

Решение. Первый шаг. Дополнительная функция прежняя:

$$C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Второй шаг. Здесь — 1 является простым корнем характеристического уравнения, поэтому $y^* = Axe^{-x}$. Дифференцируем: $\frac{dy^*}{dx} = Ae^{-x}(1-x)$, $\frac{d^2y^*}{dx^2} = Ae^{-x}(x-2)$ и подставляем в предложенное неоднородное уравнение. Имеем: $Ae^{-x}(x-2) - 2Ae^{-x}(1-x) - 3Axe^{-x} = 2e^{-x}$. Упрощая, находим: $-4Ae^{-x} = 2e^{-x}$. Значит, $A = -\frac{1}{2}$. Поэтому $y^* = -\frac{1}{2}xe^{-x}$.

Третий шаг. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$.

Пример 6. Отыскать частное решение уравнения $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos 2t$,

такое, что $s = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 2$ для $t = 0$.

Решение. Первый шаг. Решаем однородное уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$$

Его общим решением будет $C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.

Второй шаг. Здесь $\pm 2i$ суть корни характеристического уравнения, поэтому $s^* = t(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)$. Дифференцируем:

$$\frac{ds^*}{dt} = A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t - 2t(A_1 \sin 2t - A_2 \cos 2t),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -4A_1 \sin 2t + 4A_2 \cos 2t - 4t(A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t).$$

Подставляя в заданное неоднородное уравнение и упрощая, получаем:

$$-4A_1 \sin 2t + 4A_2 \cos 2t = 2 \cos 2t.$$

Отсюда $A_1 = 0$ и $A_2 = \frac{1}{2}$. Значит: $s^* = \frac{1}{2} t \sin 2t$.

Третий шаг. Общее решение предложенного неоднородного уравнения есть $s = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t$. Нужно распорядиться постоянными C_1, C_2 так, чтобы получить $s = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 2$ для $t = 0$. Первое условие дает $C_1 = 0$. Значит, $s = C_2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t$.

Дифференцируя, имеем: $\frac{ds}{dt} = 2C_2 \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} t \cdot 2 \cdot \cos 2t$. Полагая $t = 0$, имеем: $\left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=0} = 2C_2$.

Значит, $C_2 = 1$. Искомое частное решение есть: $s = \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t$.

Пример 7. Решить $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x$.

Решение. Первый шаг. Решаем однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Дополнительная функция $C_1 + C_2x$.

Второй шаг. Здесь $x = 0$ является двойным корнем характеристического уравнения. Поэтому $y^* = Ax^3 + Bx^2$.

Подставляя в предложенное неоднородное уравнение, имеем $6Ax + 2B = 2x$.

Значит, $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$.

Третий шаг. $y = C_1 + C_2x + \frac{1}{3}x^3$.

§ 113. Отыскание решения y^* в общем случае. Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = X, \quad (\text{H})$$

где p и q суть постоянные, а X — непрерывная функция одного x .

Обращаясь к методу Лагранжа (см. § 111) разыскания частного решения y^* уравнения (H), мы видели, что оно дается формулой

$$y^* = C_1Y_1 + C_2Y_2, \quad (1)$$

где Y_1 и Y_2 суть *линейно независимые* частные решения однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0, \quad (G)$$

где C_1 и C_2 суть функции от x , производные C'_1 и C'_2 которых даются формулами Лагранжа:

$$C'_1 = -\frac{X}{Y_1 \left(\ln \frac{Y_2}{Y_1} \right)'} \quad \text{и} \quad C'_2 = \frac{X}{Y_2 \left(\ln \frac{Y_2}{Y_1} \right)'}. \quad (2)$$

Формулы эти пригодны для всех случаев, т. е. и тогда, когда p и q зависят от x . В случае же *постоянных* p и q формулы Лагранжа получают простой вид.

Случай 1. *Характеристическое уравнение* $r^2 + pr + q = 0$ *имеет действительные различные корни* r_1 и r_2 .

Здесь

$$Y_1 = e^{r_1 x}, \quad Y_2 = e^{r_2 x}.$$

Значит,

$$\frac{Y_2}{Y_1} = e^{(r_2 - r_1)x} \quad \text{и} \quad \ln \frac{Y_2}{Y_1} = (r_2 - r_1)x$$

Поэтому

$$\left(\ln \frac{Y_2}{Y_1} \right)' = r_2 - r_1.$$

Подставляя в формулы (2), мы имеем:

$$C'_1 = -\frac{X}{e^{r_1 x} (r_2 - r_1)} \quad \text{и} \quad C'_2 = \frac{X}{e^{r_2 x} (r_2 - r_1)}.$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x X e^{-r_1 t} dt \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x X e^{-r_2 t} dt. \quad (3)$$

Подставляя найденные функции C_1 и C_2 в формулу (1), мы находим:

$$y^* = -\frac{e^{r_1 x}}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x X e^{-r_1 t} dt + \frac{e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x X e^{-r_2 t} dt,$$

или, после несложного упрощения:

$$y^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{x_0}^x X [e^{r_2(x-t)} - e^{r_1(x-t)}] dt. \quad (I)$$

Эта формула имеет *общий характер*, так как не нуждается ни в каких предположениях относительно вида функции X .

Случай 2. *Характеристическое уравнение* $r^2 + pr + q = 0$ *имеет комплексные корни* r_1 и r_2 .

В этом случае корни эти суть *сопряженные*, и мы имеем $r_1 = a - bi$, $r_2 = a + bi$. Полученная выше формула (I) целиком приложима и к этому случаю, но только ее надо освободить от мнимостей и дать ей *действительный вид*.

Имеем прежде всего: $r_2 - r_1 = 2bi$.

Затем $e^{r_2(x-t)} = e^{(a+bi)(x-t)} = e^a(x-t) \cdot e^{ib}(x-t)$; значит, по формуле Эйлера:

$$e^{r_2(x-t)} = e^a(x-t) [\cos b(x-t) + i \sin b(x-t)]. \quad (4)$$

Так как r_1 отличается от r_2 только знаком при i , то можно сразу написать:

$$e^{r_1(x-t)} = e^a(x-t) [\cos b(x-t) - i \sin b(x-t)]. \quad (5)$$

Вычитая из (4) равенство (5), находим:

$$e^{r_2(x-t)} - e^{r_1(x-t)} = 2ie^a(x-t) \sin b(x-t). \quad (6)$$

Наконец, подставляя все полученное в формулу (I), имеем:

$$y^* = \frac{1}{b} \int_{x_0}^x X e^a(x-t) \sin b(x-t) dt. \quad (II)$$

Формула эта, имеющая также общий характер, освобождена от множителей.

С л у ч а й 3. *Характеристическое уравнение $r^2 + pr + q = 0$ имеет равные корни $r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$.*

Чтобы получить нужную нам формулу для y^* , мы рассматриваем этот случай как предельный, когда оба корня r_1 и r_2 , до предела различные, в пределе делаются равными r .

Переписывая формулу (I) в виде

$$y^* = \int_{x_0}^x X \cdot \frac{e^{r_2(x-t)} - e^{r_1(x-t)}}{r_2 - r_1} \cdot dt,$$

мы видим, что написанное под знаком интеграла отношение есть отношение приращения функции $e^r(x-t)$ к приращению независимого переменного r , когда оно переходит от значения r_1 к значению r_2 . По *теореме о среднем Лагранжа* (см. ч. I, гл. XIV), это отношение в точности равно производной $\frac{d}{dr} e^r(x-t)$ для некоторого численного значения r^* , промежуточного между корнями r_1 и r_2 . Значит, до перехода к пределу имеем:

$$y^* = \int_{x_0}^x X(x-t) e^{r^*(x-t)} dt.$$

Когда же мы заставляем оба корня r_1 и r_2 характеристического уравнения бесгранично приближаться к фиксированному численному значению r , тогда и среднее r^* , находясь между обоими корнями r_1 и r_2 , также будет иметь пределом число r . Таким образом, переход к пределу дает нужную нам формулу:

$$y^* = \int_{x_0}^x X(x-t) e^{r(x-t)} dt, \quad s = -\frac{p}{2} \quad (III)$$

частного решения y^* неоднородного уравнения (H) в случае *равных корней*, характеристического уравнения.

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = t + \frac{1}{2}$. Отв. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{t}{9} + \frac{1}{18}$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2t + 1$. $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 13x = 39$. $x = e^{3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 7x = 14$. $x = e^{2t} (C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t) + 2$.
5. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}$. $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{e^{2t}}{3}$.
6. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$. $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + \frac{te^{2t}}{3}$.
7. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 9e^{3t}$. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{1}{2} e^{3t}$.
8. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \cos 2t$. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \cos 2t$.
9. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3 \cos 3t$. $x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{1}{2} t \sin 3t$.
10. $\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 6 \cos 3t$. $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{3} \cos 3t$.
11. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 10 \sin 3t$. $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2 \sin 3t$.
12. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin 2t$. $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2t \cos 2t$.
13. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 8 \cos 2t$. $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} - \frac{32}{65} \sin 2t - \frac{56}{65} \cos 2t$.
14. $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 13x = 30 \sin t$. $x = e^{-3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 2 \sin t - \cos t$.
15. $\frac{d^2s}{dt^2} - 2\frac{ds}{dt} + 5s = 10 \sin t$. $s = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 2 \sin t + \cos t$.
16. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 17 \sin 2t$. $x = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 4 \cos 2t + \sin 2t$.
17. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 4$. 20. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 - 2t$.
18. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 3t$. 21. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = e^{3t}$.
19. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x - 2$. 22. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = e^{-t}$.

23. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = e^{3t}$.

25. $4 \frac{d^2x}{dt^2} + x = 4 \sin \frac{t}{2}$.

24. $2 \frac{d^2y}{dt^2} - y = \sin t$.

26. $\frac{d^2s}{dt^2} - 16s = 2 \cos 4t$.

В следующих задачах разыскать частное решение, удовлетворяющее поставленным условиям:

27. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 4$; $s = 1$, $\frac{ds}{dt} = 0$ для $t = 0$. Отв. $s = e^{2t} + e^{-2t} - 1$.

28. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 8t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 4$ для $t = 0$. $s = \sin 2t + 2t$.

29. $\frac{d^2s}{dt^2} - 3 \frac{ds}{dt} = 6$; $s = 1$, $\frac{ds}{dt} = 1$ для $t = 0$. $s = e^{3t} - 2t$.

30. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 2e^x$; $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 1$ для $x = 0$. $y = e^x$.

31. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin 2t$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ для $t = 0$. $x = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$.

32. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2 \cos t$; $x = 2$, $\frac{dx}{dt} = 0$ для $t = 0$. $x = 2 \cos t + t \sin t$.

33. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 2 - x$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$ для $x = 0$.

34. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 4$; $x = 4$, $\frac{dx}{dt} = 2$ для $t = 0$.

35. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = e^t$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = -2$ для $t = 0$.

36. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 4 \sin t$; $s = 4$, $\frac{ds}{dt} = 0$ для $t = 0$.

37. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos 2t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 4$ для $t = 0$.

38. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 4e^{2x}$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ для $x = 0$.

39. $\frac{d^2s}{dt^2} + s = \sin t + \cos 2t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ для $t = 0$.

40. $\frac{d^2s}{dt^2} + s = e^{-t} + 2$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$ для $t = 0$.

§ 114. Приложения к задачам механики. Очень многие задачи механики и физики решаются методами, изложенными в этой главе. Например, задачи прямолинейного движения очень часто приводят к дифференциальным уравнениям первого или второго порядка так, что решение этих задач зависит от решения сказанных уравнений.

Напомним сперва, что:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad j = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad (1)$$

где v и j суть скорость и ускорение в какой-нибудь момент времени t , а s есть расстояние движущейся точки от фиксированного начала на траектории в рассматриваемый момент времени t .

Пример 1. В прямолинейном движении ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния s и равно -1 для $s=2$. При этом дано, что: $v=5$ и $s=8$ для $t=0$.

а) Найти v , когда $s=24$.

Решение. Согласно первому условию, имеем:

$$\text{ускорение} = j = -\frac{4}{s^2}. \quad (2)$$

Согласно последнему равенству (1), имеем:

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2}. \quad (3)$$

Переменные разделяются, и умножение на ds вместе с последующим интегрированием дает:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{4}{s} + C, \quad \text{т. е.} \quad v^2 = \frac{8}{s} + C_1. \quad (4)$$

Согласно второму условию $v=5$, $s=8$. Отсюда $C_1=24$. Поэтому уравнение (4) пишется в виде:

$$v^2 = \frac{8}{s} + 24. \quad (5)$$

Из него получаем, что если $s=24$, то $v = \frac{1}{3} \sqrt{219} = 4,93$.

б) Найти время, употребленное точкой во время пробега от $s=8$ до $s=24$.

Решение. Решая (5) относительно v , получаем:

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{8 \frac{1}{s} + 24} = \sqrt{8 \frac{1+s^2}{s}}. \quad (6)$$

Отделяя переменные s и t и интегрируя dt между заданными пределами $s=8$ и $s=24$, получаем искомую величину T времени:

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_8^{24} \frac{s \, ds}{\sqrt{s+3s^2}} = 3,20. \quad (7)$$

Примечание. Можно было бы воспользоваться первым равенством (1) и написать $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4}{s^2}$. Для интегрирования этого уравнения следует обратиться к § 107, в котором уравнение (F) имеет рассматриваемый здесь вид.

Важный тип прямолинейного движения тот, где ускорение j и расстояние s находятся в постоянном отношении и разных знаков.

В этом случае мы имеем:

$$j = -k^2s, \quad (8)$$

где k^2 — величина ускорения при расстоянии, равном единице.

Вспоминая, что сила и ускорение, вызываемое ею, совпадают до постоянного множителя, мы видим, что действующая на точку сила всегда направлена к точке $s=0$ и, по величине, прямо пропорциональна расстоянию s . Такое движение называется *простым гармоническим колебанием*.

Пользуясь равенством (1), мы получаем из (8):

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0, \quad (9)$$

т. е. линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Интегрируя (см. пример 2 предыдущего параграфа), мы получаем общее решение:

$$s = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (10)$$

Дифференцируя это равенство, мы имеем:

$$v = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt). \quad (11)$$

Легко видеть, что движение, определяемое формулой (10), есть *периодическое* с периодом $\frac{2\pi}{k}$, причем его колебание совершается между крайними положениями:

$$s = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{и} \quad s = -\sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Действительно, заменяя постоянные C_1 и C_2 двумя другими A и B , такими, что

$$C_1 = B \sin A \quad \text{и} \quad C_2 = B \cos A, \quad (12)$$

мы имеем:

$$s = B \sin(kt + A), \quad (13)$$

причем ясно, что $B = +\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и что s есть функция *периодическая* от t с периодом $\frac{2\pi}{k}$.

В следующих примерах мы указываем случаи, когда *простое гармоническое колебание возмущается другими силами*. Во всех случаях задача зависит от решения уравнения *или* однородного (G), *или* неоднородного (H), изученных выше.

Пример 2. Дано прямолинейное движение $j = -\frac{5}{4}s - v$, причем $v = 2$, $s = 0$ для $t = 0$.

а) Найти уравнение движения (т. е. s в функции от t).

Решение. Из равенств (1) мы выводим:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{5}{4}s = 0. \quad (14)$$

Это есть однородное уравнение (G). Характеристическое уравнение $r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$ имеет корнями: $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ и $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Поэтому общее решение уравнения (14) есть

$$s = e^{-\frac{t}{2}} (C_1 \cos t + C_2 \sin t). \quad (15)$$

Так как для $t = 0$ мы должны иметь $s = 0$, то $C_1 = 0$ и, значит, имеем:

$$s = C_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin t. \quad (16)$$

Дифференцируя по t , чтобы найти v , мы получаем:

$$v = C_2 e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{\sin t}{2} + \cos t \right). \quad (17)$$

И так как для $t = 0$ мы должны иметь $v = 2$, то $C_2 = 2$.
Значит, уравнение движения есть

$$s = 2e^{-\frac{t}{2}} \sin t. \quad (18)$$

б) Для каких величин времени t имеем $v = 0$?

Решение. Формула (17) показывает, что, когда $v = 0$, тогда скобка в ней должна уничтожиться. Написав ее равной нулю, мы имеем:

$$\operatorname{tg} t = 2. \quad (19)$$

Значит, мы должны иметь:

$$t = 1,10 + n\pi \quad (n — \text{целое}). \quad (20)$$

Последовательные величины переменного t формулы (20) отличаются друг от друга всегда на промежуток времени π .

И с с л е д о в а н и е. Этот пример поясняет *заглушаемое гармоническое колебание*. Действительно, в первоначальном уравнении $j = -\frac{5}{4}s - v$ ускорение j является суммой двух компонент:

$$j_1 = -\frac{5}{4}s \text{ и } j_2 = -v. \quad (21)$$

Простое гармоническое колебание, соответствующее компоненте j_1 , возмущается заглушаемой силой, дающей ускорение j_2 , и именно силой, пропорциональной скорости и направленной против движения. Эффект этой заглушающей силы двоякий.

В о-п е р в ы х, промежуток времени последовательными положениями точки, где $v = 0$, *удлинен* заглушающей силой. Ибо для простого гармонического колебания $j_1 = -\frac{5}{4}s$ мы имеем, сравнивая с (8), $k = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1,12 \dots$, причем половина периода равна $0,89 \dots \pi$. А в заглушаемом гармоническом колебании соответствующий промежуток времени равен π .

В о-в т о р ы х, величины s для последовательных крайних положений, где $v = 0$, вместо того, чтобы быть равными, теперь образуют убывающую геометрическую прогрессию. Доказательство опускаем.

Пример 3. Дано прямолинейное движение

$$j = -4s + 2 \cos 2t, \quad (22)$$

причем $s = 0$, $v = 2$ для $t = 0$.

а) Найти уравнение движения.

Решение. Из формул (1) имеем:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2 \cos 2t. \quad (23)$$

Требуемое частное решение было найдено в примере 6 § 112.

Таким образом, имеем:

$$s = \sin 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t. \quad (24)$$

б) Для каких величин t имеем $v = 0$?

Решение. Дифференцируем (24), чтобы найти v , и написав, что результат равен нулю, мы получаем:

$$(2+t) \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t = 0 \quad (25)$$

или, разделив на $\cos 2t$, имеем:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t + 2 + t = 0. \quad (26)$$

Корни этого уравнения могут быть найдены, как разъяснено в ч. I гл. XII. Рисунок 109 показывает линии

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2t, \quad y = -2 - t, \quad (27)$$

и абсциссы точек пересечения приблизительно равны:

$$t_1 = 0,88, \quad t_2 = 2,36 \text{ и т. д.}$$

Исследование. Этот пример поясняет *усиляемое гармоническое колебание*. Действительно, в (22) компонента j есть сумма двух компонент:

$$j_1 = -4s \text{ и } j_2 = 2 \cos 2t.$$

Простое гармоническое колебание, соответствующее компоненте j_1 с периодом π , теперь возмущается силой с ускорением j_2 , т. е. силой периодической, у которой период ($=\pi$) есть *тот же самый*, как и период невозмущаемого простого гармонического колебания. Эффект этой возмущающей силы двоякий.

Во-первых, промежутки времени между последовательными положениями точки, где $v = 0$, уже не является постоянной величиной, но убывает и приближается к $\frac{\pi}{2}$. На это обстоятельство указывает и чертёж.

Во-вторых, величины s для последовательных крайних положений, где $v = 0$, теперь увеличиваются и по абсолютной величине становятся бесконечно большими.

ЗАДАЧИ

В каждой из следующих задач даны ускорения и начальные условия. Найти уравнение движения.

1. $j = -4s$; $s = 0$; $v = 10$ для $t = 0$. Отв. $s = 5 \sin 2t$.
2. $j = -4s$; $s = 8$; $v = 0$ для $t = 0$. $s = 8 \cos 2t$.

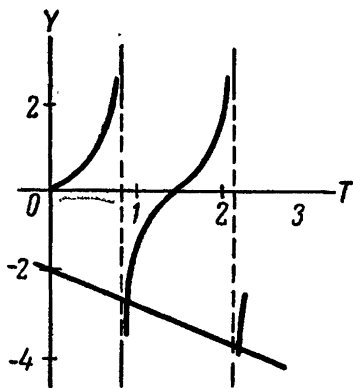


Рис. 109

3. $j = -4s$; $s = 2$, $v = 10$ для $t = 0$. **Отв.** $s = 2 \cos 2t + 5 \sin 2t$.
 4. $j = -s + k$; $s = 0$, $v = 0$ для $t = 0$. $s = k(1 - \cos t)$.
 5. $j = -2v - 5s$; $s = 5$, $v = -5$ для $t = 0$. $s = 5e^{-t} \cos 2t$.
 6. $j = -2v - 5s$; $s = 0$, $v = 12$ для $t = 0$. $s = 12e^{-t} \sin 2t$.
 7. $j = \sin 2t - s$; $s = 0$, $v = 1$ для $t = 0$. $s = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$.
 8. $j = \sin 2t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$ для $t = 0$. $s = \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t$.
 9. $j = -\frac{s}{4}$; $s = 0$, $v = 4$ для $t = 0$.
 10. $j = 9(1 - s)$; $s = 0$, $v = 0$ для $t = 0$.
 11. $j = -4v - 5s$; $s = 0$, $v = 5$ для $t = 0$.
 12. $j = \cos t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$ для $t = 0$.
 13. $j = \cos 2t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$ для $t = 0$.
 14. $j = -4v - 13s$; $s = 0$, $v = 6$ для $t = 0$.

15. Ускорение частицы дано равенством $j = -4s + 3 \sin t$.

а) Если частица приходит в движение, отправляясь из начала с нулевой скоростью, найти уравнение ее движения.

Отв. $s = \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$.

б) Каково наибольшее расстояние от начала, достигаемое точкой?

16. Ответить на вопросы предыдущей задачи, если ускорение дается формулой

$$j = -4s - 8 \sin 2t.$$

Отв. а) $s = 2t \cos 2t - \sin 2t$; б) $s = 2t \cos 2t + \sin 2t$.

17. Тело падает, выйдя из состояния покоя, под действием его веса и малого сопротивления, изменяющегося как скорость. Доказать следующие соотношения:

$$j = g - kv,$$

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}),$$

$$s = \frac{g}{k^2} (kt + e^{-kt} - 1),$$

$$ks + v + \frac{g}{h} \left(1 - \frac{kv}{g} \right) = 0.$$

18. Тело падает, выйдя из состояния покоя, пройдя расстояние 80 футов. Принимая $j = 32 - v$, найти время. **Отв.** 3,47 сек.

19. Движущееся судно в тихой воде подвержено замедлению, пропорциональному его скорости в рассматриваемый момент. Показать, что скорость судна, спустя t секунд после остановки двигателя, дается формулой $v = ce^{-kt}$, где c есть скорость судна в момент остановки двигателя.

20. В некоторый момент судно, дрейфующее (сносимое ветром) в тихой воде, имеет скорость 4 мили в час. Одну минуту спустя эта скорость стала 2 мили в час. Найти пройденное расстояние.

21. В известных условиях отклонение гальванометра дается уравнением

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta}{dt} + k^2\theta = 0.$$

Показать, что, если $\mu > k$, отклонение его может стать нулем. Найти полное решение при $\mu < k$.

115. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.

Однородные уравнения. Они имеют вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n y = 0, \quad (K)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n суть постоянные числа.

Сделав подстановку $y = e^{rx}$, мы получим в левой части:

$$(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_{n-1} r + p_n) e^{rx}.$$

Это выражение является нулем тогда и только тогда, когда удовлетворено уравнение

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0, \quad (1)$$

называющееся *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (K). Если r есть корень характеристического уравнения, тогда e^{rx} есть решение дифференциального уравнения (K).

Корни характеристического уравнения (1) порождают частные решения дифференциального уравнения (K). Это делается точно таким же образом, как и в случае уравнений *второго порядка*. Ничего существенно нового здесь нет, и мы сразу даем соответствующее правило интегрирования уравнения (K), отсылая за доказательствами к более обширным учебникам.

Правило решения уравнения (K)

Первый шаг. *Написать характеристическое уравнение*

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0. \quad (1)$$

Второй шаг. *Полностью решить характеристическое уравнение, найдя все его n корней, действительных или комплексных, неравных между собой или равных.*

Третий шаг. *Для корней характеристического уравнения составить соответствующие частные решения дифференциального уравнения по следующему закону:*

| Характеристическое уравнение | Дифференциальное уравнение |
|--|--|
| а) $\left. \begin{array}{l} \text{Всякий отдельный действительный корень } r_1 \end{array} \right\}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{дает} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{частное решение } e^{r_1 x}. \end{array} \right.$ |

- б) Всякая отдельная пара комплексных корней $a \pm bi$ } дает { два частных решения $e^{ax} \cos bx$ и $e^{ax} \sin bx$.
 в) Кратный корень, встречающийся s раз, } дает { s (или $2s$) частных решений, получаемых умножением частных решений а) [или б)] на $1, x, x^2, \dots, x^{s-1}$.

Четвертый шаг. Умножить каждое из полученных n независимых решений¹ на произвольное постоянное и сложить все эти n парных произведений. Эта сумма и является общим решением у дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$.

Решение. Прилагаем указанное правило.

Первый шаг. Пишем характеристическое уравнение:

$$r^3 - 3r^2 + 4 = 0.$$

Второй шаг. Решаем его; его корни суть $-1, 2, 2$.

Третий шаг. а) Корень -1 дает частное решение e^{-x} . в) Двойной корень 2 дает два частных решения:

$$e^{2x} \text{ и } xe^{2x}.$$

Четвертый шаг. Общее решение есть

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}.$$

Пример 2. Решить

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

Решение. Прилагаем указанное правило.

Первый шаг. Характеристическое уравнение:

$$r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0.$$

Второй шаг. Решаем его; его корни суть $1, 1, 1 \pm 2i$.

Третий шаг. б) Пара $1 \pm 2i$ комплексных корней дает два частных решения: $e^x \cos 2x$ и $e^x \sin 2x$. в) Двойной корень 1 дает два частных решения e^x и xe^x .

¹ Проверка аккуратности работы основывается на том, имеем ли мы, после совершения первых трех шагов, на самом деле n независимых частных решений, или меньше. Если работа велась аккуратно, мы должны иметь в точности n линейно независимых решений.

Четвертый шаг. Общее решение есть

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^x \cos 2x + C_4 e^x \sin 2x,$$

т. е.

$$y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

Уравнения с правой частью. Они имеют вид:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n y = X, \quad (L)$$

где p_1, p_2, \dots, p_n суть постоянные числа, а X — непрерывная функция одного x .

Из § 110 мы уже знаем, что *общее* решение y неоднородного уравнения (L) пишется в виде:

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n + y^*, \quad (2)$$

где $C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n$ есть общее решение однородного уравнения (K), получить которое мы уже умеем, а последнее слагаемое y^* есть *какое-нибудь* частное решение предложенного уравнения (L) с правой частью.

Таким образом, все дело сводится к получению только одного *какого-нибудь* частного решения y^* уравнения (L), но здесь, при *произвольном* виде непрерывной функции X , стоящей в правой части, мы встречаемся со значительными трудностями.

Однако когда функция X имеет специальный вид, рассмотренный в § 112, то тогда поиски частного решения y^* значительно облегчаются и, в этом случае, можно с успехом применить к уравнению (L) n -го порядка все то, что мы делали для уравнений *второго* порядка. Это суть случаи, когда:

- 1) функция X есть многочлен $P(x)$ от буквы x ;
- 2) функция X есть произведение $P(x) \cdot e^{ax}$ многочлена $P(x)$ на показательную функцию e^{ax} ;
- 3) функция X есть произведение $P(x) \cos bx$ или $P(x) \sin bx$, где $P(x)$ есть многочлен.

В этих трех случаях определение частного решения y^* делается, как было показано на примерах, *способом неопределенных коэффициентов*.

В этих случаях можно также руководиться следующим приемом.

Правило разыскания частного решения y^* .

Первый шаг. *Последовательно дифференцировать данное уравнение (L) и получить либо непосредственно, либо путем исключения, новое дифференциальное уравнение, хотя и более высокого порядка t , но зато уже однородное, т. е. типа (K).*

Второй шаг. Решить это новое дифференциальное уравнение по правилу решения однородных уравнений и написать его общее решение в виде:

$$(C_1Y_1 + C_2Y_2 + \dots + C_nY_n) + C_{n+1}Y_{n+1} + \dots + C_mY_m,$$

где часть, содержащаяся в скобках, является общим решением того первоначального однородного уравнения, которое получаем, заменяя в данном уравнении функцию X через нуль.

Третий шаг. Подставить выражение $C_{n+1}Y_{n+1} + \dots + C_mY_m$ в данное уравнение (L), приравнять коэффициенты при одинаковых членах, стоящих в левой и в правой частях полученного тождества, определить отсюда постоянные $C_{n+1}^{(0)}, \dots, C_m^{(0)}$ и подставить их в выражение $C_{n+1}Y_{n+1} + \dots + C_mY_m$. Это выражение

$$y^* = C_{n+1}^{(0)}Y_{n+1} + \dots + C_m^{(0)}Y_m$$

и явится искомым частным решением данного уравнения (L).

Этот метод мы разъясняем на нижеследующем примере.

Примечание. Важно заметить, что решение характеристического уравнения нового дифференциального уравнения сильно облегчается тем обстоятельством, что его левая часть всегда делится без остатка на левую часть характеристического уравнения старого дифференциального уравнения.

Пример. Решить

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x. \quad (3)$$

Решение. Характеристическое уравнение предложенного уравнения есть $r^2 - 3r + 2 = 0$. Его корни суть 2, 1. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$C_1e^{2x} + C_2e^x. \quad (4)$$

Первый шаг. Дифференцируем (3):

$$y''' - 3y'' + 2y' = xe^x + e^x. \quad (5)$$

Вычитая из (5) уравнение (3), имеем¹:

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x. \quad (6)$$

Снова дифференцируя, имеем:

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 2y' = e^x. \quad (7)$$

¹ Этого вычитания не следует бояться, ибо, дифференцируя предложенное уравнение, мы всякий раз получаем новое уравнение, содержащее в себе все решения старого уравнения. Поэтому оба уравнения: новое и старое, можно комбинировать сложением и вычитанием.

Вычитая из (7) уравнение (6), имеем:

$$y^{IV} - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0. \quad (8)$$

Значит, имеем уравнение уже типа (K), т. е. *однородное*.

Второй шаг. Решаем (8). Его характеристическое уравнение есть $r^4 - 5r^3 + 9r^2 - 7r + 2 = 0$. Его левая часть обязана делиться без остатка на левую часть $r^2 - 3r + 2$ характеристического уравнения предложенного неоднородного уравнения (3). И, действительно, имеем, деля:

$$r^4 - 5r^3 + 9r^2 - 7r + 2 = (r^2 - 3r + 2)(r - 1)^2.$$

Значит, корни характеристического уравнения

$$r^4 - 5r^3 + 9r^2 - 7r + 2 = 0 \quad (9)$$

суть 1, 1, 1, 2. Поэтому общее решение уравнения (8) есть:

$$(C_1 e^{2x} + C_2 e^x) + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x. \quad (10)$$

Третий шаг. Сравнивая (10) и (4), мы видим, что

$$y^* = C_3^{(0)} x e^x + C_4^{(0)} x^2 e^x \quad (11)$$

является частным решением предложенного неоднородного уравнения (3) при надлежащих численных значениях $C_3^{(0)}$, $C_4^{(0)}$ произвольных постоянных C_3 и C_4 .

Чтобы найти $C_3^{(0)}$ и $C_4^{(0)}$, дифференцируем дважды (11). Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy^*}{dx} &= C_3^{(0)} (x e^x + e^x) + C_4^{(0)} (x^2 e^x + 2x e^x) \\ \text{и} \quad \frac{d^2 y^*}{dx^2} &= C_3^{(0)} (x e^x + 2e^x) + C_4^{(0)} (x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в предложенное уравнение (3) и сокращая на e^x обе части, после приведения подобных членов мы имеем:

$$-2C_4^{(0)} x + (2C_4^{(0)} - C_3^{(0)}) = x. \quad (13)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменного x , мы имеем $-2C_4^{(0)} = 1$ и $2C_4^{(0)} - C_3^{(0)} = 0$. Отсюда: $C_3^{(0)} = -1$ и $C_4^{(0)} = -\frac{1}{2}$.

Подставляя в (11), имеем:

$$y^* = -x e^x \left(1 + \frac{1}{2} x \right). \quad (14)$$

Таково частное решение уравнения (3). Общее же его решение будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - x e^x \left(1 + \frac{x}{2} \right).$$

§ 116. Метод Лагранжа изменения постоянных. Он применим для разыскания частного решения y^* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = X, \quad (L)$$

когда известно общее решение

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n \quad (1)$$

ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{d^4 s}{dt^4} + 3 \frac{d^2 s}{dt^2} - 4s = 0. \quad \text{Отв. } s = C_1 e^t + C_2^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t$$

$$2. \frac{d^4 x}{dt^4} - 4 \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad x = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 e^{-2t}.$$

$$3. \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{d^2 x}{dt^2} - 12 \frac{dx}{dt} = 0. \quad x = C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-4t}.$$

$$4. \frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{dy}{dx} = 0. \quad y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

$$5. \frac{d^5 s}{dt^5} - 4 \frac{ds}{dt} = 0.$$

$$\text{Отв. } s = C_1 + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + C_3 e^{-\sqrt{2}t} + C_4 \cos \sqrt{2} \cdot t + C_5 \sin \sqrt{2} \cdot t.$$

$$6. \frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 8y = 0.$$

$$\text{Отв. } y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

$$7. \frac{d^4 \rho}{d\theta^4} - 12 \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + 27\rho = 0. \quad \text{Отв. } \rho = C_1 e^{2\theta} + C_2 e^{-3\theta} + C_3 e^{\sqrt{3}\theta} + C_4 e^{-\sqrt{3}\theta}.$$

$$8. \frac{d^3 s}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + s = 0. \quad \text{Отв. } s = e^{-t} (C_1 + C_2 t + C_3 t^2).$$

$$9. \frac{d^4 y}{dx^4} - 2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$\text{Отв. } y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

$$10. \frac{d^4 s}{dt^4} + 3 \frac{d^3 s}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = 0. \quad \text{Отв. } s = C_1 + e^{-t} (C_2 + C_3 t + C_4 t^2).$$

$$11. \frac{d^4 y}{dx^4} + 2n^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + n^4 y = 0.$$

$$\text{Отв. } y = (C_1 + C_2 x) \cdot \cos nx + (C_3 + C_4 x) \cdot \sin nx.$$

$$12. \frac{d^3 s}{dt^3} = s. \quad \text{Отв. } s = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$

$$13. \frac{d^3 \rho}{d\theta^3} - 2 \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \frac{d\rho}{d\theta} = e^\theta. \quad \rho = C_1 + e^\theta \left(C_2 + C_3 \theta + \frac{\theta^2}{2} \right).$$

$$14. \frac{d^4 y}{dx^4} = y + x^3. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3.$$

$$15. \frac{d^3 s}{dt^3} - \frac{d^2 s}{dt^2} - 6 \frac{ds}{dt} = 6. \quad s = C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-2t} - t.$$

$$16. \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x e^{nx}.$$

$$\text{Отв. } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x e^{nx}}{n^2 - 3n + 2} - \frac{(2n - 3) e^{nx}}{(n^2 - 3n + 2)^2}.$$

$$17. \frac{d^2 s}{dt^2} - 9 \frac{ds}{dt} + 20s = t^2 e^{3t}. \quad \text{Отв. } s = C_1 e^{4t} + C_2 e^{5t} + \frac{e^{3t} (7 + 6t + 2t^2)}{4}.$$

$$18. \frac{d^2 s}{dt^2} + 4s = t \sin^2 t.$$

$$\text{Отв. } s = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{8} - \frac{t \cos 2t}{32} - \frac{t^2 \sin 2t}{16}.$$

$$19. \frac{d^4 s}{dt^4} - 5 \frac{d^2 s}{dt^2} + 4s = 0.$$

$$20. \frac{d^4 s}{dt^4} + 5 \frac{d^2 s}{dt^2} + 4s = 0.$$

$$21. \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = x^2 - 8.$$

$$22. \frac{d^4 y}{dx^4} - 3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

$$1. \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{2x+1} = 0.$$

$$\text{Отв. } Ce^{\frac{1}{y}} = 2x+1.$$

$$2. 8 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 27y.$$

$$y = (t+C)^{\frac{8}{3}}.$$

$$3. \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 27y^2 = 0.$$

$$y = (x+C)^3.$$

$$4. 4 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 9x.$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$5. \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 5 \sin 3t - 10 \cos 3t.$$

$$\text{Отв. } y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2 \cos 3t - \sin 3t.$$

$$6. \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 4e^{2t} + 4t^2.$$

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{2} e^{2t} + t^2 - 2.$$

$$7. \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 16 - 5 \sin 3t.$$

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \sin 3t + 4.$$

$$8. \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 8e^{2t} + 15 \sin \frac{t}{2}.$$

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{2t} + 4 \sin \frac{t}{2}.$$

$$9. y dx + (x+y) dy = 0.$$

$$y^2 + 2xy = C.$$

$$10. \frac{ds}{dt} + \frac{s}{t} = 0.$$

$$s = \frac{t^2}{3} + \frac{C}{t}.$$

$$11. \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{4}{s^3}.$$

$$C_1 s^2 = (C_1 t + C_2)^2 + 4.$$

$$12. x \sin \left(\frac{y}{x} \right) dy - y \sin \left(\frac{y}{x} \right) dx + x dx = 0.$$

$$\text{Отв. } Cx = e^{\cos \left(\frac{y}{x} \right)}.$$

$$13. \frac{ds}{dt} + s \operatorname{tg} t = \operatorname{tg} t.$$

$$s = 1 + C \cos t.$$

$$14. \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 6e^{4t} - 8e^{-t}, \quad y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} + e^{4t} + 2e^{-t}.$$

$$15. \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - 3x = 4e^{3t} - 12. \quad x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + t e^{3t} + 4.$$

$$16. \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 5e^{2t} + 11e^{-t}. \quad x = e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{2t} + \frac{11}{8} e^{-t}.$$

$$17. (x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0. \quad \text{ОТВ. } Cx = x^2 - y^2.$$

$$18. \frac{ds}{dt} + 2st = t^3. \quad s = \frac{1}{2} (t^2 - 1) + C e^{-t^2}.$$

$$19. 2 \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

$$20. \frac{ds}{dt} + \frac{2st}{t^2 + 1} = \frac{1}{t}.$$

$$21. \frac{d^2s}{dt^2} + 4 \frac{ds}{dt} + 13s = 4 \cos 3t - 12 \sin 3t.$$

$$22. \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = -5e^{-2t} - 6t - 18.$$

$$23. \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} - 6s = 6t + \sin t.$$

$$26. (4y + 3x) \frac{dy}{dx} + y = 2x.$$

$$24. \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}.$$

$$27. x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0.$$

$$25. 3 \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}.$$

$$28. \frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = 1.$$

Решить каждое из следующих дифференциальных уравнений, пользуясь указанными преобразованиями:

$$29. t^2 \frac{ds}{dt} - 2st - s^3 = 0. \quad \text{Полагаем } s = \frac{t^3}{v}.$$

$$\text{ОТВ. } \frac{t^4}{2s^2} + \frac{t^3}{3} = C.$$

$$30. (t^2 + t) ds = (t^2 + 2st + s) dt. \quad \text{Полагаем } s = vt.$$

$$\text{ОТВ. } s = Ct(1+t) - t.$$

$$31. (3 + 2st) s dt = (3 - 2st) t ds. \quad \text{Полагаем } st = v.$$

$$32. (x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 2x + 2y + 5. \quad \text{Полагаем } x + y = v.$$

ГЛАВА IX

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 117. Двухмерная интегральная сумма. Мы уже знаем, что *интегральной суммой* называется сумма

$$S = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_i) \Delta x_i + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1},$$

составляемая по следующему правилу.

Первый шаг. *Делим данный отрезок $[a, b]$ на n отрезков:*

$$[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n = b].$$

Второй шаг. *Выбираем в каждом из этих n отрезков произвольным образом по одной точке:*

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}.$$

Третий шаг. *Составляем n парных произведений $f(\xi_i) \times \Delta x_i$, помножая длину отрезка на коэффициент, равный значению данной непрерывной функции $f(x)$ в выбранной точке этого отрезка.*

Четвертый шаг. *Складываем полученные парные произведения все вместе.*

Такие интегральные суммы мы будем теперь называть *простыми* или *одномерными*.

Совершенно по такому же правилу составляются *двухмерные* интегральные суммы, к рассмотрению которых нам и следует перейти.

Представим себе, что на плоскости $ХОУ$ у нас имеется замкнутая кривая C , не пересекающая саму себя. Совокупность точек плоскости $ХОУ$, лежащих внутри кривой, а также на кривой, будем называть *замкнутой областью D* . Слово *замкнутая* и говорит о том, что в рассматриваемую совокупность точек включены точки, принадлежащие кривой C — границе области. Без этих точек область была бы *незамкнутой*¹. Легко провести аналогию между понятиями

¹ В дальнейшем там, где это не поведет к недоразумению, т. е. где учащийся может ясно видеть, о какой области идет речь: замкнутой или незамкнутой, мы для сокращения будем просто говорить «область».

замкнутой и незамкнутой области и уже знакомыми нам понятиями отрезка (замкнутого интервала) и промежутка (незамкнутого интервала, т. е. отрезка без концов).

Пусть в замкнутой области D нам задана непрерывная функция $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y . Это значит, что всякой точке $M(x, y)$, принадлежащей области D или ее границе (т. е. кривой C), отвечает вполне определенное численное значение рассматриваемой непрерывной функции $f(x, y)$.

Определение. Двухмерной интегральной суммой называется сумма

$$f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_l) \cdot \sigma_l + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1},$$

составляемая по следующему правилу.

Первый шаг. Разбиваем данную замкнутую область D (рис. 110) на n площадок $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, которые перечисляем в каком угодно порядке.

Второй шаг. Выбираем в каждой из этих n площадок по одной точке $M_0, M_1, M_2, \dots, M_l, \dots, M_{n-1}$, беря ее каждый раз, где придется: внутри площадки или на ее контуре.

Третий шаг. Составляем n парных произведений:

$$f(M_0) \cdot \sigma_0, f(M_1) \cdot \sigma_1, f(M_2) \cdot \sigma_2, \dots, \\ f(M_l) \cdot \sigma_l, \dots, f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1},$$

умножая всякий раз величину площади площадки на коэффициент, равный значению данной функции $f(x, y)$ в выбранной точке площадки. Для удобства значение функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ с координатами x и y мы обозначили просто через $f(M)$.

Четвертый шаг. Складываем все вместе полученные таким путем n парных произведений:

$$S = f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_l) \cdot \sigma_l + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1}.$$

Ясно, что для данной области D и для заданной непрерывной функции $f(x, y)$ можно образовать не одну только интегральную сумму, но бесчисленное множество интегральных сумм, потому что и область D можно по-разному разбить на площадки и по-разному можно в них выбрать по точке. Отсюда читатель видит, что численная величина интегральной суммы S зависит от двух обстоятельств:

- 1) от способа разбиения области D на площадки;
- 2) от выбора в этих площадках по одной точке.

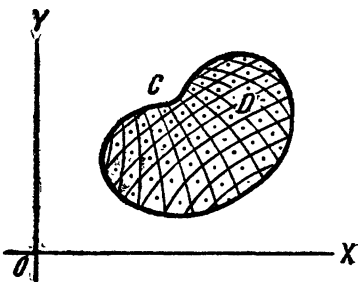


Рис. 110

§ 118. Геометрический смысл двухмерной интегральной суммы. Мы видели, что простая (одномерная) интегральная сумма S имеет

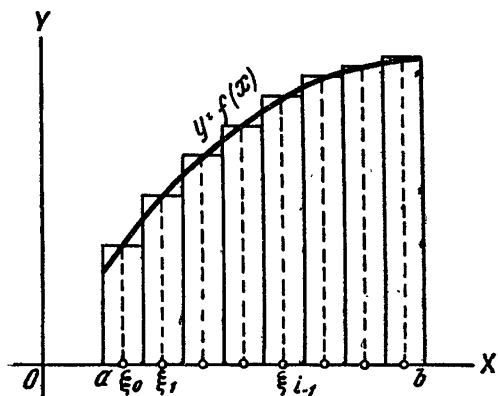


Рис. 111

очень несложный геометрический смысл: это есть просто площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников, имеющих своими основаниями отрезки $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$, а высотами ординаты $f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_{n-1})$, т. е. значения рассматриваемой функции $f(x)$ в выбранных точках $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ (рис. 111).

Можно дать геометрическое истолкование и для двухмерной интегральной суммы S .

Для этой цели представим себе в трехмерном пространстве $OXYZ$ (рис. 112) непрерывную поверхность, имеющую своим уравнением

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ как раз и есть заданная нам непрерывная функция в замкнутой области D , ограниченной контуром C .

Этот последний лежит на плоскости XOY . Если мы через его точки проведем перпендикуляры к плоскости XOY , доводя их лишь до пересечения с нашей поверхностью и обрывая их на ней, мы получим цилиндр, образующие которого параллельны оси OZ , нижнее основание которого плоское (именно, область) и верхнее основание которого кривое (именно, кусок нашей поверхности, ограниченный кривым замкнутым контуром C').

Представим себе, что область D разбита на n малых площадок $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Если мы теперь в граничных точках каждой площадки

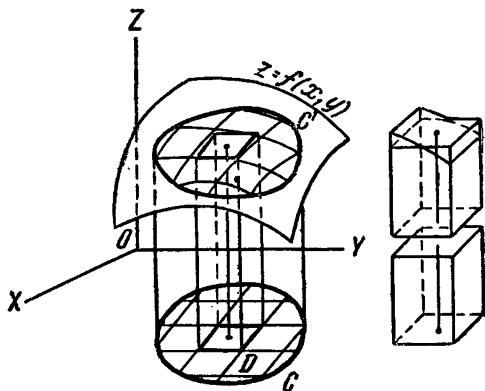


Рис. 112

восставим точно так же перпендикуляры к плоскости XOY , доводя их до пересечения с нашей поверхностью, мы будем иметь n тонких цилиндров, образующие которых параллельны оси OZ . Ниж-

ними основаниями этих цилиндров служат плоские площадки σ_i , а верхними основаниями — кривые куски нашей поверхности, лежащие внутри кривого контура C' , начерченного, как сказано выше, на поверхности (рис. 112). Ясно, что объем всего цилиндра в точности равен сумме объемов n этих тонких цилиндров.

Выберем в каждой из плоских малых площадок $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ по одной точке $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$. Если мы теперь восставим в каждой из этих точек M_i перпендикуляр к плоскости XOY , доводя его по-прежнему до пересечения с поверхностью, и если мы проведем через его конец, лежащий на этой поверхности, плоскость, параллельную горизонтальной плоскости XOY , мы получим цилиндр, имеющий теперь уже оба свои основания *плоскими* и параллельными. Нижнее основание этого цилиндра есть малая площадка σ_i ; верхнее основание его по размерам и форме тождественно с площадкой σ_i , только поднято на высоту, равную значению функции $f(x, y)$ в выбранной точке M_i , т. е. равную $f(M_i)$. Образующие же нашего цилиндра, разумеется, параллельны оси OZ , т. е. вертикальны.

Мы для удобства называем этот цилиндр с плоскими основаниями *столбиком*. Ясно, что столбик, опирающийся на площадку σ_i , есть *либо вписанный* в цилиндр с кривым верхним основанием, опирающийся тоже на σ_i , *либо описанный* около него, *либо промежуточный*. Все дело в том, как выбрана точка M_i в площадке σ_i : выбрана ли точка M_i так, что $f(M_i)$ есть *наименьшее* из всех значений функции $f(x, y)$ в площадке σ_i , или значение $f(M_i)$ есть *наибольшее*, или *промежуточное* между наименьшим и наибольшим.

Итак, над каждой малой площадкой σ_i возвышается тонкий вертикальный столбик с параллельными (горизонтальными) основаниями. Из элементарной же геометрии известно, что объем прямого цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Следовательно, объем рассматриваемого столбика в точности равен парному произведению $f(M_i) \cdot \sigma_i$, потому что площадь основания столбика равна σ_i , а высота его равна $f(M_i)$.

Если мы теперь построим указанный тонкий столбик над каждой площадкой σ_i , мы получим ступенчатое тело, составленное из n столбиков, объемом которого будет служить наша интегральная сумма:

$$S = f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_i) \cdot \sigma_i + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1}.$$

Таким образом, *двухмерная интегральная сумма S численно равна объему ступенчатого тела, составленного из вертикальных столбиков, имеющих площадки σ_{i-1} своими основаниями и аппликаты $f(M_{i-1})$ поверхности своими высотами.*

§ 119. Двойной (определенный) интеграл. Мы знаем, что простая (одномерная) интегральная сумма

$$S = f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_i) \Delta x_i + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

стремится к совершенно определенному пределу, когда наибольший из отрезков $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_{n-1}$, на которые мы разделили данный отрезок $[a, b]$, *бесконечно уменьшается*. При этом функция $f(x)$ предполагается *непрерывной* на всем отрезке $[a, b]$. Далее, мы знаем, что этот предел интегральной суммы S называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$, взятым по отрезку $[a, b]$,

и обозначается знаком $\int_a^b f(x) dx$.

Затем мы знаем, что определенный интеграл фактически вычисляется по формуле Лейбница — Ньютона:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ обозначает первообразную для $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

И, наконец, мы знаем, каков геометрический смысл определенного интеграла: *простой (однократный) определенный интеграл*

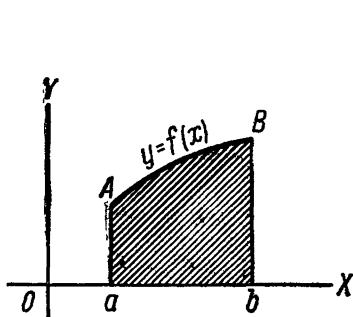


Рис. 113

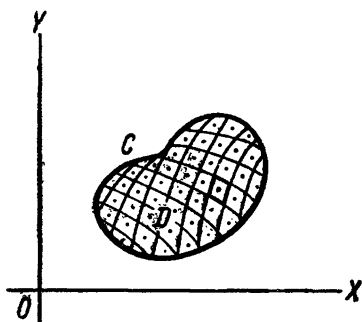


Рис. 114

геометрически обозначает величину площади AabB (рис. 113), *ограниченной: отрезком $[a, b]$, ординатами в его концах и данной кривой $y = f(x)$.*

Перейдем теперь к рассмотрению двухмерной интегральной суммы:

$$S = f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_i) \cdot \sigma_i + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1}.$$

Предположим, что площадки $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, на которые мы разбили область D , заданную контуром C (рис. 114), изменяются с течением времени и начинают *безгранично уменьшаться* (и не в смысле одной только величины площади площадок, но и в смысле

размера их диаметров), так что даже самый большой из их диаметров¹ и тот бесгранично умалется. Это значит, что площадки $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ делаются все более и более мелкими. И так как они должны заполнять постоянную площадь внутри контура S , то их число неизбежно должно бесгранично увеличиваться. С другой стороны, непрерывная функция $f(x, y)$ есть *ограниченная*; поэтому для всех точек $M(x, y)$ мы имеем неравенство:

$$|f(x, y)| < K,$$

где K есть постоянная величина. Отсюда следует, что «общий член» $f(M) \cdot \sigma_i$ двухмерной интегральной суммы S имеет абсолютную величину, меньшую чем $K \cdot \sigma_i$, и, значит, бесгранично умалется.

Таким образом, *когда наибольший из диаметров площадок $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ бесгранично умалется, двухмерная интегральная сумма S становится суммой бесгранично увеличивающегося числа бесконечно умалющихся слагаемых,*

В этих условиях двухмерная интегральная сумма S стремится к определенному пределу, всегда одному и тому же, какую бы форму ни имели бесконечно умалющиеся площадки $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и каким бы образом ни выбирались в них точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$.

Мы не можем в рамках настоящей книги входить в доказательство этого важного предложения. Мы ограничимся тем, что просто предупредим читателя об его истинности для областей, ограниченных спрямляемыми кривыми, т. е. кривыми, имеющими конечную длину; доказательство же можно найти в более подробных курсах анализа.

Предел двухмерной интегральной суммы S называется *двойным (определенным) интегралом* и обозначается знаком, аналогичным знаку простого (однократного) интеграла, именно:

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Читается этот знак так: «двойной интеграл по области D эф икс игрек дэ икс дэ игрек».

¹ *Диаметром d какой-либо плоской фигуры F называется наибольшая из хорд этой фигуры. На прилагаемом рисунке 115 диаметром, очевидно, является хорда d . Если фигура с течением времени изменяется так, что ее диаметр бесгранично умалется, то это значит, что она *стягивается в точку*. Если же только площадь фигуры бесгранично умалется, то отсюда еще не следует, что она должна стягиваться в точку, так как фигура может оставаться весьма длинной и только бесгранично утончаться.*

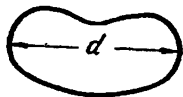


Рис. 115

Подстановка буквы D под знаком двойного интеграла \iint есть указание на то, что *интегрирование* (т. е. суммирование, сопровождающееся затем переходом к пределу) ведется по всей области D .

Примечание. Как и простой (однократный) определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, двойной (определенный) интеграл получил такое символическое обозначение, которое всегда бы нам напоминало, пределом какого именно выражения он служит. Именно, двухмерная интегральная сумма

$$f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_{i-1}) \cdot \sigma_{i-1} + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1}$$

может быть составлена в предположении, что площадки $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ являются прямоугольниками, полученными от разбиения области D прямыми линиями, параллельными осям координат OX и OY (рис. 116).

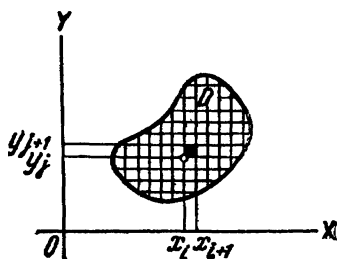


Рис. 116

Предположить это мы всегда вправе, так как предел интегральной суммы не зависит от формы площадок $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, лишь бы они *все* безгранично умаялись (диаметром). Но если мы дадим площадкам $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ прямоугольную форму, как было указано, то «общий член» интегральной суммы напишется в виде тройного произведения

$$f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

потому что «общей площадкой» будет теперь та, которая составлена из точек $M(x, y)$, абсциссы которых x удовлетворяют неравенствам $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ и ординаты которых удовлетворяют неравенствам $y_j \leq y \leq y_{j+1}$. Поэтому площадью такой площадки будет произведение $\Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Выбирая же точку M_{ij} с координатами x_i, y_j (т. е. нижнюю левую вершину) на этой «общей» площадке, мы получаем общий член интегральной суммы в виде $f(x_i, y_j) \Delta x_i \cdot \Delta y_j$, и, значит, сама интегральная сумма напишется в виде:

$$\sum_j \sum_i f(x_i, y_j) \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

где первое суммирование делается по значку j , что дает вертикальную полосу, содержащуюся внутри контура C , а второе суммирование, по значку i , заставляет эту полосу двигаться слева направо, *описывая таким образом внутренность всего контура C* .

Если теперь общее приращение абсциссы Δx_i написать просто в виде Δx , а общее приращение Δy_j ординаты написать просто в виде Δy , то интегральная сумма напишется в виде:

$$\iint f(x, y) \Delta x \Delta y.$$

Естественно поэтому и предел интегральной суммы, т. е. двойной (определенный) интеграл, написать так, чтобы некоторые следы интегральной суммы были сохранены в обозначении предела. Отсюда и получилось обозначение двойного (определенного) интеграла в виде символа

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

§ 120. Геометрический смысл двойного интеграла. В силу изложенного ранее о геометрическом смысле двухмерной интегральной суммы, геометрический смысл двойного (определенного) интеграла очень прост. Мы видели, что двухмерная интегральная сумма обозначает объем ступенчатого тела, составленного из вертикальных столбиков, имеющих площадки σ_{i-1} своими основаниями и аппликаты $f(M_{i-1})$ поверхности своими высотами.

Обозначим через V объем вертикального цилиндрического тела (рис. 117), образующие которого параллельны оси OZ , нижним основанием которого служит область D , лежащая на плоскости XOY , а верхнее основание которого кривое, представляющее собой кусок поверхности $z = f(x, y)$, прикрывающий сверху рассматриваемое цилиндрическое тело. Если, приняв какое-нибудь разбиение области D на площадки $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, мы выберем точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ в них так, чтобы соответствующие аппликаты $f(M_i)$ всегда были *минимальными* в этих площадках, тогда столбики, имеющие σ_i своими основаниями и $f(M_i)$ своими высотами, понятно, будут *вписанными* в вертикальные цилиндры, имеющие σ_i своим нижним основанием и кусок поверхности $z = f(x, y)$ своим верхним основанием. Значит, раз столбик является частью цилиндра, в который он вписан, то объем столбика будет меньше объема этого цилиндра. И так как объем столбика равен $f(M_i) \cdot \sigma_i$, то отсюда следует, что сумма объемов всех n столбиков, равная, очевидно, интегральной сумме

$$S = f(M_0) \cdot \sigma_0 + f(M_1) \cdot \sigma_1 + \dots + f(M_{n-1}) \cdot \sigma_{n-1},$$

будет меньше суммы объемов всех n цилиндров; эта же последняя, очевидно, равна объему V всего цилиндрического тела. Итак, мы находим, что при выборе точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$, дающих минимальные аппликаты, $S < V$. Поэтому и предел интегральной

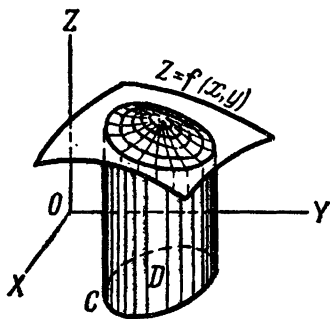


Рис. 117

суммы S не может быть больше, чем V . Следовательно,

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq V.$$

Если теперь мы сделаем другой выбор точек M_0, M_1, \dots, M_{n-1} , выбирая их так, чтобы аппликаты $f(M_i)$ были *максимальными* в площадках σ_i , то рассматриваемые столбики, имеющие основаниями σ_i и высотами $f(M_i)$, будут, очевидно, уже *описанными* около соответствующих цилиндров, и, значит, ступенчатое тело, составленное из столбиков, будет содержать все цилиндрическое тело. Так как объем ступенчатого тела есть интегральная сумма, то поэтому при таком выборе точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ мы получим $S > V$, и значит,

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq V.$$

Сопоставление двух предыдущих неравенств дает:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V.$$

Следовательно, двойной (определенный) интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по области D численно равен объему вертикального цилиндрического тела, имеющего область D одним своим основанием и кусок поверхности $z = f(x, y)$ другим своим основанием.

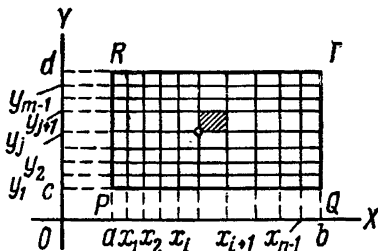


Рис. 118

Заметим, что если поверхность $z = f(x, y)$ расположена *под* плоскостью XOY , то двойной интеграл, а стало быть, и объем V тела *отрицательны*, потому что в этом случае функция $f(x, y)$ отрицательна.

§ 121. Вычисление двойного интеграла. Случай прямоугольной области. Случай этот самый простой, и с него естественно начать вычисление двойного интеграла.

Возьмем прямоугольник $PQTR$ (рис. 118), все точки $M(x, y)$ площади которого имеют абсциссу x , заключенную между a и b , и ординату y , содержащуюся между c и d , т. е. $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$.

Пусть функция $f(x, y)$ есть *непрерывная* внутри этого прямоугольника, включая контур.

Чтобы вычислить двойной интеграл

$$\iint_{PQTR} f(x, y) dx dy,$$

естественно разбить прямоугольник $PQTR$ на маленькие прямоугольники, проводя прямые, параллельные осям координат. Разделим для этого отрезок $[a, b]$, лежащий на оси OX , на n малых отрезков при помощи точек деления $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ и проведем через эти точки деления прямые, параллельные оси OY . Аналогично разделим отрезок $[c, d]$, лежащий на оси OY , на m малых отрезков при помощи точек деления $c < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < d$ и проведем через эти точки деления прямые, параллельные оси OX .

Ясно, что вследствие этого данный прямоугольник $PQTR$ разобьется на $n \times m$ прямоугольников, для которых и следует составить интегральную сумму; при этом для удобства мы выбираем точки M в нижнем левом углу каждого из этих четырехугольников. Таким образом, в прямоугольнике

$$[x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}],$$

заштрихованном на чертеже, нами будет выбрана точка (x_i, y_j) .

Этот прямоугольник мы будем рассматривать как «общий». Его площадь, очевидно, равна $\Delta x_i \times \Delta y_j$.

Поэтому «общий» член интегральной суммы будет

$$f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

Следовательно, вся интегральная сумма будет

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

Оба указанные суммирования здесь производятся *одновременно*. Но рассматриваемая интегральная сумма есть конечная, а во всякой конечной сумме *можно изменять как угодно порядок суммирования*. Естественно поэтому в целях удобнейшего вычисления предлагаемой интегральной суммы попробовать вычислить ее *двумя* следующими способами.

Первый способ

Сначала суммирование ведется по переменной y и уже затем по переменной x .

Так как буква y снабжена значком j , а буква x — значком i , то нужно сначала суммировать по значку j и уже затем по i .

Значит, мы имеем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\Delta x_i \times \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j \right].$$

Заметим при этом, что просуммировав по значку j , мы у полученной частной суммы имеем право вынести за знак суммирования множитель Δx_i , так как он один и тот же у всех членов рассматриваемой частной суммы.

Напишем эту *двухмерную* интегральную сумму для простоты иначе, именно: уничтожим значки у букв x и y , предполагая, что значения этих переменных изменяются не непрерывно, а *скачками*, причем x пробегает числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и y пробегает числа $c, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$. Тогда наша двухмерная интегральная сумма напишется так:

$$\sum_a^b \left[\Delta x \times \sum_c^d f(x, y) \cdot \Delta y \right].$$

Геометрически такой порядок расположения слагаемых в двухмерной интегральной сумме означает, что сначала набираются слагаемые по *вертикальной* полоске, так как при первом (внутреннем) суммировании x предполагается *постоянной* (рис. 119). И уже затем, набрав слагаемые по всем вертикальным полоскам, мы производим второе (наружное) суммирование, складывая все вертикальные суммы, для чего теперь уже нужно изменять x .

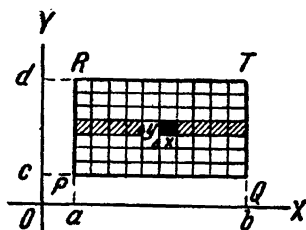


Рис. 119

Будем теперь безгранично умалить диаметры одновременно *всех* прямоугольников, на которые был разбит данный прямоугольник $PQTR$. Мы знаем, что

тогда двухмерная интегральная сумма стремится к совершенно определенному пределу, который есть двойной интеграл

$$\int \int_{PQTR} f(x, y) dx dy$$

по площади прямоугольника $PQTR$.

Так как бесконечное уменение прямоугольников мы вольны производить, как нам вздумается, то мы можем сначала бесконечно умалить высоты Δy этих прямоугольников¹, оставляя неприкосновенными их основания Δx . Но вследствие того, что первая (внутренняя)

сумма, есть, очевидно, простая (одномерная) интегральная сумма, то ее пределом при этом приближении высот Δy прямоугольников к нулю будет простой (однократный) определенный интеграл

$$\int_c^d f(x, y) dy,$$

взятый между постоянными пределами c и d по букве y в предположении, что буква x постоянная.

Значит, подводя все Δy к нулю, мы имеем как промежуточный этап вычисления двойного интеграла количество

$$\sum_a^b \Delta x \times \int_c^d f(x, y) dy.$$

Наконец, подводя к нулю Δx , мы находим уже окончательный результат:

$$\iint_{PQTR} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Итак, вычисление двойного интеграла по прямоугольнику требует таких действий:

Правило. Первый шаг. *Предполагая переменную x постоянным числом, проинтегрировать функцию $f(x, y)$ по переменной y между пределами c и d , определяющими ее изменение.*

Второй шаг. *Полученный после первого шага результат проинтегрировать по переменной x между пределами a и b , определяющими ее изменение.*

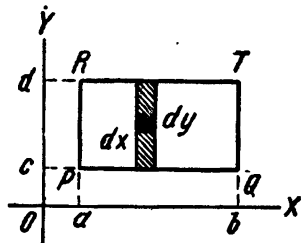


Рис. 120

Прилагаемый рисунок 120 служит читателю для напоминания о том, что интегрирование сначала идет по вертикальным полоскам (значит, x постоянно) и уже после этого интегрирование ведется по x от a до b .

Второй способ

Сначала суммирование ведется по переменной x , а уже затем по переменной y .

¹⁾ Кажущаяся рискованность этого рассуждения не дает места, даже формально, каким-либо сомнениям, так как ведь мы с самого начала предполагаем существование предела двухмерной интегральной суммы.

Все, что было сказано выше о первом способе, приложимо и ко второму, потому что свойства переменных x и y совершенно одинаковы. Только здесь все идет наоборот, так как переменные x и y здесь меняются ролями.

Прежде всего мы еще раз изменяем порядок слагаемых в двухмерной интегральной сумме, производя сначала суммирование по значку i и уже потом — по значку j . Это дает право написать двухмерную интегральную сумму в виде

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[\Delta y_j \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \right].$$

Здесь мы, производя частное суммирование по значку i , выносим количество Δy_j , как постоянный множитель, за знак этого частного суммирования.

Полученную формулу мы напомним в виде

$$\sum_c^d \left[\Delta y \times \sum_a^b f(x, y) \cdot \Delta x \right].$$

предполагая, что сохраняется прежнее соглашение о том, что переменные x и y пробегает не все возможные значения, но лишь $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и $c, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$.

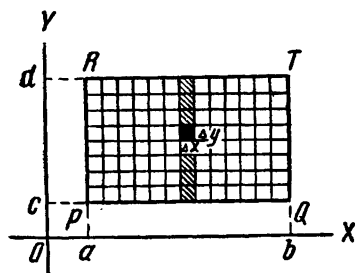


Рис. 121

Геометрически такой порядок расположения слагаемых в двухмерной интегральной сумме означает, что сначала набираются слагаемые по *горизонтальной* полоске (рис. 121), потому что при первом (внутреннем) суммировании y предполагается *постоянной*. И уже затем, набрав слагаемые по всем горизонтальным полоскам, мы производим второе (наружное) суммирование,

складывая все горизонтальные суммы, для чего теперь уже нужно изменять y .

Для полного вычисления двойного интеграла $\iint_{PQTR} f(x, y) dx dy$

мы должны одновременно бесконечно умалить стороны Δx и Δy наших прямоугольников в выражении двухмерной интегральной суммы. Производя сначала бесконечное уменение сторон Δx , мы имеем в качестве *промежуточного этапа* вычисления предела двухмерной интегральной суммы количество

$$\sum_c^d \Delta y \times \int_a^b f(x, y) dx.$$

Наконец, приближая к нулю Δu , мы находим уже *окончательный результат*:

$$\int \int_{PQTR} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Правило. Первый шаг. Предполагая переменную y постоянным числом, проинтегрировать функцию $f(x, y)$ по переменной x между пределами a и b , определяющими ее изменение.

Второй шаг. Полученный после первого шага результат проинтегрировать по переменной y между пределами c и d , определяющими ее изменение.

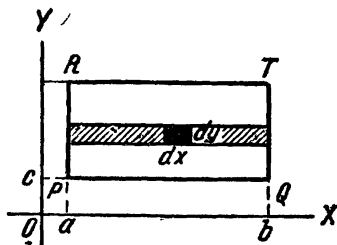


Рис. 122

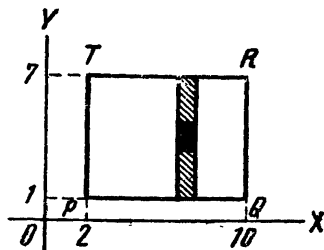


Рис. 123

Прилагаемый рисунок 122 послужит читателю напоминанием того, что интегрирование сначала идет по горизонтальной полоске (y *постоянно*) и уже затем по букве y от c до d .

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int \int_{PQTR} xy dx dy$$

по прямоугольнику $PQTR$, вершины которого лежат соответственно в точках $(2, 1)$, $(10, 1)$, $(10, 7)$, $(2, 7)$ (рис. 123).

Первый способ

Решение

Первый шаг. Предполагая букву x постоянной, интегрируем функцию xy по переменной y между пределами 1 и 7, определяющими ее изменения:

$$x \int_1^7 y dy = x \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^7 = \left(\frac{49}{2} - \frac{1}{2} \right) x = 24x.$$

Второй шаг. Полученный после первого шага результат интегрируем по переменной x между пределами 2 и 10, определяющими ее изменение:

$$24 \int_2^{10} x dx = 24 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{10} = 24 \cdot 48 = 1152.$$

Короче вычисление следует записывать так:

$$\begin{aligned} \iint_{PQTR} xy \, dx \, dy &= \int_2^{10} \int_1^7 xy \, dx \, dy = \int_2^{10} dx \int_1^7 xy \, dy = \\ &= \int_2^{10} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^7 dx = \int_2^{10} 24x \, dx = 1152. \end{aligned}$$

Второй способ

Меняя порядок интегрирования, т. е. интегрируя сперва по x , а затем по y , получим:

$$\begin{aligned} \iint_{PQTR} xy \, dx \, dy &= \int_1^7 \int_2^{10} xy \, dy \, dx = \int_1^7 dy \int_2^{10} xy \, dx = \\ &= \int_1^7 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{10} dy = 48 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^7 = 48 \cdot 24 = 1152. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить объем прямоугольного параллелепипеда¹ (рис. 124), основанием которого служит прямоугольник примера 1, а высота равна 5.

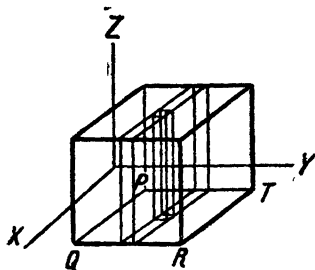


Рис. 124

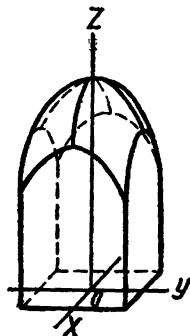


Рис. 125

Решение.

Положим $f(x, y) = 5$. Тогда двойной интеграл $\iint_{PQTR} 5 \, dx \, dy$ согласно его геометрическому смыслу (§ 120) дает искомый объем параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \iint_{PQTR} 5 \, dx \, dy &= \int_2^{10} \int_1^7 5 \, dx \, dy = 5 \int_2^{10} dx \int_1^7 dy = \\ &= 5 \int_2^{10} dx \int_1^7 dy = 5 \int_2^{10} [y]_1^7 dx = 5 \int_2^{10} 6 \, dx = 5 \cdot 6 \cdot 8 = 240. \end{aligned}$$

¹ Разумеется, для вычисления объема параллелепипеда нет нужды пользоваться интегральным исчислением, и рассматриваемый пример служит только иллюстрацией исследуемого вопроса.

Пример 3. Вычислить объем прямого параллелепипеда, срезанного сверху параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и стоящего над квадратом, который образуется в плоскости HOY прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ (рис. 125).

Решение. Здесь $f(x, y) = z = 4 - x^2 - y^2$, и мы будем иметь:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (4 - x^2 - y^2) dy dx = \int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{+1} (4 - x^2 - y^2) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_{-1}^{+1} dy = \int_{-1}^{+1} \left(8 - \frac{2}{3} - 2y^2 \right) dy = 13 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

§ 122. Вычисление двойного интеграла. Общий случай области, ограниченной криволинейным контуром. Мы сначала предполагаем, что область D ограничена криволинейным контуром C , таким, что всякая вертикальная прямая встречает его не более как в двух точках (рис. 126). Случай этот мы рассматриваем по аналогии с предыдущим¹.

Если абсцисса точки P есть x , то длины обоих отрезков PM_1 и PM_2 , где M_1 и M_2 суть две точки встречи криволинейного контура C с вертикальной прямой, проведенной через точку P , понятно, зависят от x . Следовательно, длины отрезков PM_1 и PM_2 будут две некоторые функции аргумента x .

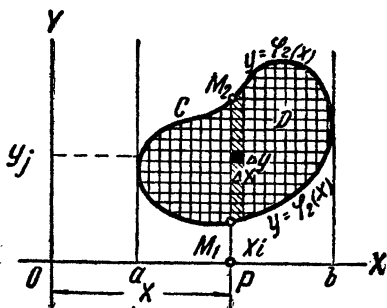


Рис. 126

Мы вводим обозначения: $PM_1 = \varphi_1(x)$ и $PM_2 = \varphi_2(x)$ и предполагаем, что наш контур C таков, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ *непрерывные*.

Пусть $f(x, y)$ есть данная нам непрерывная функция в замкнутой области D , т. е. включая и самый контур.

Чтобы иметь двухмерную интегральную сумму, мы делим область D на весьма малые прямоугольники, проводя прямые, параллельные осям координат OX и OY . Образующиеся при этом прямоугольники будут двух сортов: полные и урезанные криволинейным контуром C . Первые будут лежать внутри контура C , вторые будут пересекаться с контуром C . Этими последними мы будем всегда пренебрегать, потому что тот добавок, который они вносят в двухмерную интегральную сумму, будет безгранично умаляться с бесконечным

¹ Мы отсылаем для строгого рассмотрения этого случая к более полным курсам математического анализа.

умалением диаметров всех прямоугольников. Действительно, обозначая площади этих урезанных контуром C прямоугольников через $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ и выбрав в них как-нибудь по одной точке $M', M'', \dots, M^{(p)}$, мы видим, что этими неполными прямоугольниками будут внесены в двухмерную интегральную сумму слагаемые: $f(M') \cdot \omega_1, f(M'') \cdot \omega_2, \dots, f(M^{(p)}) \cdot \omega_p$.

Но функция $f(x, y)$, будучи непрерывной, есть функция *ограниченная*. Это значит, что имеем всегда

$$|f(x, y)| < K,$$

где K — положительная постоянная.

Поэтому слагаемые, внесенные в двухмерную интегральную сумму урезанными прямоугольниками, все вместе составят количество, по абсолютной величине меньшее, чем

$$K \cdot \omega_1 + K \cdot \omega_2 + \dots + K \cdot \omega_p$$

или

$$K(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p).$$

Но $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p$ есть вся площадь этих урезанных контуром C прямоугольников. Читатель должен рассматривать, как очевидный, тот факт, что *сумма $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p$ площадей урезанных контуром C прямоугольников стремится к нулю вместе с бесконечным умалением диаметров этих прямоугольников*. Таким образом, имеем $\lim K(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p) = 0$, что доказывает, что неполными прямоугольниками всегда можно пренебрегать.

Что же касается полных, то мы берем их *все* и для того, чтобы иметь двухмерную интегральную сумму, выбираем в каждом из них точки M в *нижнем левом* углу его. Поэтому если прямоугольник $(x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1})$ есть «общий» полный четырехугольник, то он внесет в двухмерную интегральную сумму слагаемые

$$f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

и, значит, вся двухмерная интегральная сумма (кроме слагаемых, происходящих от неполных четырехугольников) будет:

$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_j,$$

где значки i и j должны браться лишь такими, чтобы соответствующий прямоугольник $(x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1})$ непременно попал внутрь контура C и не был ни урезанным, ни внешним для контура C .

Написав эту двумерную интегральную сумму сокращенно в виде

$$\sum_x \sum_y f(x, y) \Delta x \Delta y,$$

где x и y пробегают отнюдь не все возможные числа, а лишь те числа x_i и y_j , которые послужили для покрытия внутренности контура C сетью четырехугольников и притом с тем ограничением, чтобы соответствующие четырехугольники попадали полностью внутрь контура C , мы производим *перегруппировку слагаемых*.

Именно, мы сначала набираем слагаемые для прямоугольников, составляющих *вертикальную* полосу. Значит, набирая вертикальную полосу, мы обязаны рассматривать переменную x как *постоянное* число; поэтому у всех этих слагаемых множитель Δx будет одинаковым, и его, следовательно, можно вынести за знак этого частного (по вертикальной полоске) суммирования. И уже затем, набрав слагаемые по вертикальным полоскам, мы должны будем сложить все эти вертикальные суммы, для чего теперь нужно изменять переменную x .

Если мы выполним указанную перегруппировку, двумерная интегральная сумма примет вид: $\sum_x \left[\Delta x \times \sum_y f(x, y) \Delta y \right]$.

Для вычисления двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ мы должны одновременно бесконечно умалить стороны Δx и Δy наших прямоугольников в выражении двумерной интегральной суммы. Произведем сначала бесконечное уменение сторон Δy , как было объяснено в сумме прямоугольного контура интеграции. Мы будем иметь в качестве *промежуточного этапа* вычисления предела двумерной

интегральной суммы количество $\sum_x \Delta x \times \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, потому, что

при x постоянном точки $M(x, y)$, выбранные в прямоугольниках рассматриваемой вертикальной полоски, находятся только на отрезке $M_1 M_2$, деля его на бесконечно умалющиеся части. Поэтому при x постоянном переменная интеграции y пробегает лишь отрезок $M_1 M_2$, и, значит, при интегрировании по y мы имеем: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, где x в этот момент рассматривается лишь как *постоянная* величина.

Наконец, приближая к нулю Δx , мы имеем уже *окончательный результат*:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

где a и b — это те два крайние значения абсциссы x , которые вообще только возможны для абсцисс вершин прямоугольников, лежащих в области D . Значит, a и b суть такие два числа, что вертикальные прямые $x=a$ и $x=b$ прикасаются к контуру C слева и справа, содержа его между ними.

Таким образом, для вычисления двойного интеграла по области D , ограниченной контуром C , не пересекающимся с собой и притом таким, что всякая прямая, параллельная оси OY , пересекает его не более чем в двух точках (рис. 127), имеем:

Правило.

Первый шаг. Найти уравнение $y=\varphi_1(x)$ нижней линии контура C и уравнение $y=\varphi_2(x)$ его верхней линии.

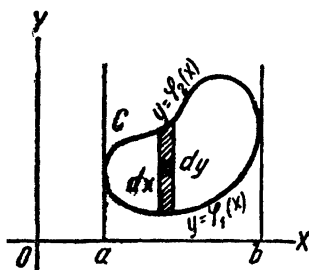


Рис. 127

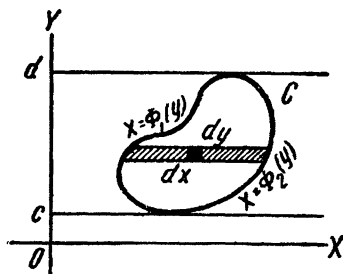


Рис. 128

Второй шаг. Предполагая переменную x постоянной, проинтегрировать функцию $f(x, y)$ по y между пределами $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Третий шаг. Полученный после второго шага результат проинтегрировать по x между двумя постоянными числами a и b , находимыми из того условия, чтобы прямые $x=a$ и $x=b$ касались слева и справа заключенного между ними контура C .

Так как роли переменных x и y одинаковые, то учащийся без всяких новых рассуждений видит справедливость и следующего второго правила для вычисления двойного интеграла по области D , если только всякая прямая, параллельная оси OX , пересекает контур C , ограничивающий эту область не более чем в двух точках (рис. 128).

Первый шаг. Найти уравнение $x=\Phi_1(y)$ левой линии контура C и уравнение $x=\Phi_2(y)$ его правой линии (рис. 128).

Второй шаг. Предполагая переменную y постоянной, проинтегрировать функцию $f(x, y)$ по x между пределами $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$.

Третий шаг. Полученный после второго шага результат проинтегрировать по y между двумя постоянными числами c и d , находимыми из того условия, чтобы прямые $y=c$ и $y=d$ касались сверху и снизу заключенного между ними контура S .

Если контур S пересекается прямыми вертикальными и прямыми горизонтальными не более чем в двух точках, то к нему приложимы сразу оба предыдущие правила и тогда надо поступать как удобнее.

Если контур S пересекается прямыми, параллельными осям координат, более чем в двух точках, тогда площадь, содержащуюся внутри контура S , разбивают на такие части, к которым можно уже применить предыдущие правила.

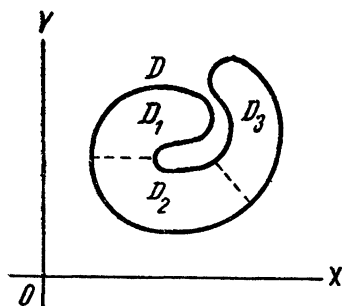


Рис. 129

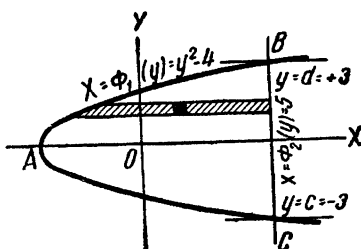


Рис. 130

Например, достаточно рассечь область D , представленную на рисунке 129, по пунктирным линиям, чтобы предыдущие правила оказались применимыми к каждой из трех областей D_1 , D_2 , D_3 в отдельности. Ясно, что двойной интеграл по области D будет равен сумме трех двойных интегралов по областям D_1 , D_2 , D_3 .

Пример. Проинтегрировать функцию $f(x, y) = x + 2y$, если рассматриваются значения ее в области, ограниченной линиями $y^2 = 4 + x$ и $x = 5$ (черт. 130).

Решение. Искомый интеграл есть

$$I = \int_c^d \int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)} (x + 2y) dy dx,$$

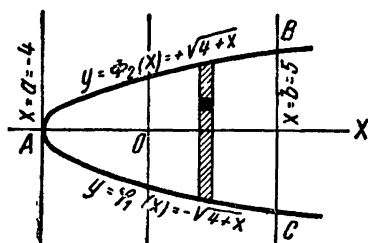
причем первое интегрирование мы будем производить по x .

Первый шаг. Находим уравнения $x = \Phi_1(y)$ и $x = \Phi_2(y)$ левой и правой линий контура, ограничивающего рассматриваемую область.левой линией является парабола. Поэтому из уравнения ее находим $x = y^2 - 4$. Правая линия есть прямая $x = 5$. Следовательно, $x = \Phi_1(y) = y^2 - 4$ и $x = \Phi_2(y) = 5$.

Второй шаг. Предполагая y постоянным числом, интегрируем функцию $x + 2y$ по x между найденными пределами $x = y^2 - 4$ и $x = 5$:

$$\int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2yx \right]_{y^2-4}^5 = \frac{9}{2} + 18y + 4y^2 - 2y^3 - \frac{y^4}{2}.$$

Третий шаг. Полученный результат надо теперь проинтегрировать по y между двумя постоянными пределами c и d , которые определяются из того соображения, чтобы контур C содержался между прямыми $y = c$ и $y = d$, касаясь их. Очевидно, в этом случае такими прямыми являются прямые, параллельные оси Ox и проходящие через точки пересечения прямой $x = 5$ с параболой. Для определения координат точек B и C решаем совместно уравнения параболы и прямой и находим: $B(5, 3)$; $C(5, -3)$. Следовательно, уравнения искомого прямых будут: $y = -3$, $y = +3$. Итак, искомыми пределами являются $c = -3$, $d = +3$. Поэтому пишем:



$$I = \int_{-3}^{+3} \left(\frac{9}{2} + 18y + 4y^2 - 2y^3 - \frac{y^4}{2} \right) dy = 50 \frac{2}{5}.$$

Рис. 131

Когда у учащегося приобретается навык в решении такого рода задач, можно вычисление интегралов производить и короче, сразу найдя значения пределов внутреннего и внешнего интегралов. Таким образом будем иметь:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^{+3} \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dy dx = \int_{-3}^{+3} \left[\frac{x^2}{2} + 2yx \right]_{y^2-4}^5 dy = \\ &= \int_{-3}^{+3} \left(\frac{9}{2} + 18y + 4y^2 - 2y^3 - \frac{y^4}{2} \right) dy = 50 \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Решим теперь этот же пример, изменив порядок интегрирования:

$$I = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (x+2y) dx dy.$$

Первый шаг. Находим уравнения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ нижней и верхней линий, ограничивающих рассматриваемую область (рис. 131). Нижней линией является нижняя ветвь параболы $y^2 = 4 + x$, а верхней — верхняя ее ветвь. Поэтому получим:

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x) = -\sqrt{4+x} \\ y &= \varphi_2(x) = +\sqrt{4+x}. \end{aligned}$$

Второй шаг. Предполагая x постоянным числом, интегрируем функцию $x+2y$ по y между найденными в первом шаге пределами:

$$\int_{-\sqrt{4+x}}^{+\sqrt{4+x}} (x+2y) dy = 2x\sqrt{x+4}.$$

Третий шаг. Полученный результат надо теперь проинтегрировать по x между двумя постоянными пределами a и b , которые определяются из того соображения, чтобы контур C содержался между прямыми $x=a$ и $x=b$, касаясь их. Очевидно, что таковыми прямыми являются в нашем случае слева — прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси OY , а справа — прямая $x=5$. Уравнение левой прямой есть $x=-4$, ибо точка A имеет координаты $(-4, 0)$. Таким образом $a=-4$, $b=5$. Поэтому будем иметь:

$$I = \int_{-4}^{+5} 2x\sqrt{4+x} dx = 50 \frac{2}{5}.$$

Заметим, что при интегрировании вторым способом мы пришли к необходимости вычислить более трудный интеграл. Поэтому при выборе порядка интегрирования следует принимать во внимание сложность получающихся после первого интегрирования функций. В примере § 125 мы покажем, что при выборе порядка интегрирования следует принимать в соображение также и характер контура, ограничивающего область интегрирования.

§ 123. Двойной интеграл в полярных координатах. Мы знаем, что при вычислении двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ вовсе не

обязательно пользоваться непременно бесконечно умалющимися *прямоугольниками*, имеющими стороны, параллельные осям координат OX и OY : *здесь возможен бесконечный произвол*. Мы знаем, что всегда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim [f(M_0)\sigma_0 + f(M_1)\sigma_1 + \dots + f(M_{n-1})\sigma_{n-1}],$$

где бесконечно умалющиеся площадки $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, на которые разбивается область D , могут быть какой угодно формы. Важно только, чтобы точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ выбирались на соответственных площадках $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$.

Иногда оказывается чрезвычайно удобным пользоваться при вычислении двойного интеграла *полярными координатами*.

В этом случае площадки $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ образуются двумя семействами линий: *прямыми*, исходящими из полюса O , и *окружностями*, имеющими полюс O своим центром (черт. 132).

В этих условиях ясно, что величина «общей» площадки будет приближенно равна $\rho d\rho d\theta$, если эту площадку рассматривать как прямоугольник со сторонами $\rho d\theta$ и $d\rho$.

Значит, двойной интеграл напишется в виде

$$\iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta.$$

Простое рассмотрение рисунков 133 и 134 покажет учащемуся, как надо производить фактическое вычисление двойного интеграла в полярных координатах:

$$\text{I. } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \quad (\text{рис. 133})$$

$$\text{II. } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\Phi_1(\rho)}^{\Phi_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta \quad (\text{рис. 134})$$

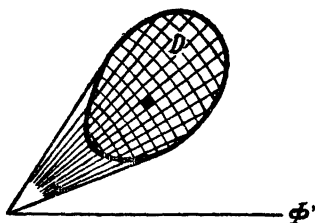


Рис. 132

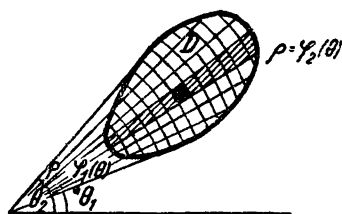


Рис. 133

Пример. Вычислить интеграл функции $f(\rho, \theta) = \rho^2$ по области, ограниченной окружностью $\rho = 2a \cos \theta$ (рис. 135).

Решение. Нам надо вычислить интеграл

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \rho^2 \cdot \rho d\theta d\rho,$$

где $\rho = \varphi_1(\theta) = 0$, как это непосредственно видно из рис. 135, а $\rho = \varphi_2(\theta) = 2a \cos \theta$ из уравнения контура. Что касается значений θ_1 и θ_2 , то легко

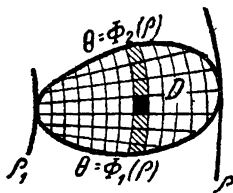


Рис. 134

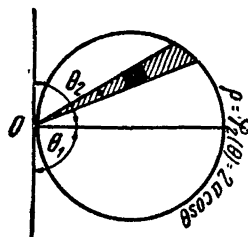


Рис. 135

видеть, что $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $\theta_2 = +\frac{\pi}{2}$, так как при изменении угла от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ мы охватим все секторы, на которые разбиваем область интегрирования. Таким образом, будем иметь:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho^3 d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 4a^4 \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{2} \pi a^4.$$

ЗАДАЧИ

Проверить вычисленные интегралы¹:

$$1. \int_0^a \int_0^b xy(x-y) dy dx = \frac{a^2 b^2}{6} (b-a).$$

$$6. \int_0^a \int_{\frac{x_2}{a_2}}^x \frac{x dx dy}{x^2 + y^2} = \frac{a}{2} \ln 2.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a \cos \theta}^a \rho^4 d\theta d\rho = \left(\pi - \frac{16}{15}\right) \frac{a^5}{10}.$$

$$7. \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos \theta)} \rho^2 \sin \theta d\theta d\rho = \frac{2a^3}{3}.$$

$$3. \int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy dy dx = \frac{11a^4}{24}.$$

$$8. \int_0^b \int_t^{10t} \sqrt{st-t^2} dt ds = 6b^3.$$

$$4. \int_{\frac{b}{2}}^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho d\rho d\theta = \frac{3}{16} \pi b^2.$$

$$9. \int_0^{2a} \int_{\frac{v^2}{a}}^v (w+2v) dv dw = 11,2a^3.$$

$$5. \int_0^1 \int_0^{v^2} e^{\frac{w}{v}} dv dw = \frac{1}{2}.$$

$$10. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} \rho^2 \sin^2 \theta d\theta d\rho = 2 \frac{2}{5}.$$

11. Проинтегрировать функцию $f(\rho, \theta) = \sin \theta$ по области, ограниченной верхней частью окружности $\rho = a \cos \theta$.

Отв. $\frac{a^3}{6}$.

12. Проинтегрировать функцию $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ по области, ограниченной осью OY и параболой $y^2 = a^2 - ax$.

Отв. $4a$.

13. Проинтегрировать функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ по области, ограниченной осью OX и прямыми $y = x$ и $x = 2a$.

Отв. $\frac{16a^4}{3}$.

Приложения двойного интеграла

§ 124. Объем цилиндрического тела. В § 120 было уже показано, что если функция $z = f(x, y)$ представляет собой уравнение поверхности, ограничивающей цилиндрическое тело, образующие которого параллельны оси OZ , а направляющая кривая C лежит на плоскости XOY , то двойной интеграл этой функции по области D , ограниченной контуром C , выражает объем этого цилиндрического тела:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy,$$

¹ Первое интегрирование совершается по той переменной, дифференциал которой, а соответственно и интеграл, занимают последнее место.

В § 121 нами был рассмотрен пример (см. пример 3) на вычисление объема цилиндрического тела.

ЗАДАЧИ

1. Найти объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$ и поверхностью $z = 12 + y - x^2$.

Отв. $4\frac{9}{140}$.

2. Найти объем тела, ограниченного плоскостью XOY , цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостью $x + y + z = 3$.

Отв. 3π .

3. Найти объем тела, расположенного в первом октанте и ограниченного цилиндром $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и параболоидом $xu = z$.

Отв. π .

4. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY , цилиндром $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ и поверхностью прямого кругового конуса, вершина которого расположена в начале координат, ось совпадает с осью OZ и угол осевого сечения при вершине равен 90° .

Отв. $\frac{32}{9}a^3$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностью шара радиуса a и поверхностью прямого кругового цилиндра, радиус поперечного сечения которого равен $\frac{a}{2}$ и одна из образующих которого проходит через центр шара.

Отв. $\frac{2}{9}a^3(3\pi - 4)$.

6. Вычислить объем тела, которое снизу ограничено площадью лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, расположенной в плоскости XOY , сверху — поверхностью шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а с боков — цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит лемниската.

Отв. $\frac{1}{9}a^2(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

7. Найти объем тела, ограниченного плоскостью XOY , параболоидом $az = x^2 + y^2$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

Отв. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

§ 125. Площади, ограниченные плоскими кривыми. Как выше было обнаружено, двойной интеграл функции $f(x, y)$ по области D , ограниченной контуром C , выражает собой объем цилиндрического тела, образующие которого параллельны оси OZ и которое ограничено поверхностью $z = f(x, y)$. Положим $f(x, y) = 1$. Тогда, очевидно, интеграл

$$\iint_D dx dy \quad \text{или} \quad \iint_D \rho d\rho d\theta$$

будет выражать объем прямой призмы, построенной на основании D , ограниченном контуром C , и имеющей высоту, равную единице. Численно этот объем равен величине площади области D , ограниченной контуром C . Отсюда следует, что площади плоских фигур могут быть вычислены при помощи двойных интегралов

$$\iint_D dx dy \quad (\text{в прямоугольных координатах}),$$

$$\iint_D \rho d\rho d\theta \quad (\text{в полярных координатах}).$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 4$ и прямой $y = 2 - x$ (рис. 136).

Решение. Решая уравнения данных линий совместно, найдем точки пересечения параболы и прямой: $A(0, 2)$ и $B(8, -6)$. Интегрируем сперва по x . Тогда уравнение левой ограничивающей линии $x = \Phi_1(y)$ найдем из уравнения параболы: $x = \frac{y^2 - 4}{4}$, а уравнение правой ограничивающей линии $x = \Phi_2(y) = 2 - y$ есть уравнение прямой. Постоянные пределы c и d равны, очевидно, -6 и $+2$. Таким образом, будем иметь:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx dy = \\ &= \int_{-6}^2 \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4} \right) dy = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

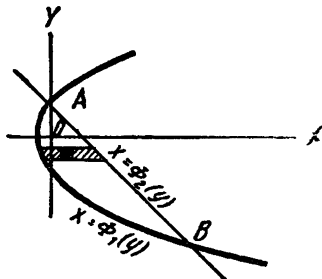


Рис. 136

Замечание. Если бы мы сперва стали интегрировать по y , то все вычисление было бы более сложным: слева от оси OY надо было бы интегрировать между пределами $y = -\sqrt{4x+4}$, $y = +\sqrt{4x+4}$, а справа между пределами $y = -\sqrt{4x+4}$ и $y = 2 - x$. Следовательно, искомая площадь S выразилась бы суммой двух двойных интегралов:

$$S = \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{4x+4}}^{+\sqrt{4x+4}} dx dy + \int_0^8 \int_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} dx dy.$$

ЗАДАЧИ

1. Посредством двойного интегрирования найти площадь, содержащуюся между параболой $3y^2 = 25x$ и $5x^2 = 9y$. **Отв.** 5.

2. Вычислить площадь в первом квадранте, лежащую между параболой $y^2 = ax$ и окружностью $y^2 = 2ax - x^2$. **Отв.** $\frac{1}{4} \pi a^2 - \frac{2}{3} a^2$.

3. Посредством двойного интегрирования найти площадь, содержащуюся между кругами $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta$ ($b > a$), интегрируя сперва по ρ .

Отв. $\frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)$.

4. Посредством двойного интегрирования найти площадь фигур, ограниченных следующими линиями:

a) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x + y = a$.

Отв. $\frac{a^3}{3}$.

b) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.

$\frac{1}{2} (15 - 8 \ln 4)$.

c) $y^2 = 4ax + 4a^2$, $y^2 = -4bx + 4b^2$.

$\frac{8}{3} (a + b) \sqrt{ab}$.

d) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

$\sqrt{2} - 1$.

$$\text{е) } y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, \quad 2y = x, \quad x = 0. \quad a^2(\pi - 1).$$

$$\text{ф) } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x + y = a. \quad \frac{a^2}{32}(16 - 3\pi).$$

§ 126. Центр тяжести плоской фигуры. Если обозначим через x и y координаты *центра тяжести* плоской фигуры, то, как было показано в § 56:

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int dm},$$

где x и y — координаты точки, в которой сосредоточена масса dm элемента площади. Следовательно, мы можем положить $dm = \omega \, dx \, dy$ или $dm = \omega r \, dr \, d\theta$, где ω есть *поверхностная плотность* рассматриваемой области. Благодаря этому в качестве пределов суммы слагаемых вида $\omega x \, dx \, dy$, $\omega y \, dx \, dy$ и $\omega \, dx \, dy$ получим теперь *двойные интегралы*. Таким образом, будем иметь:

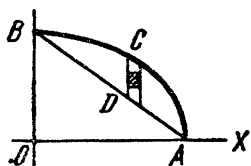


Рис. 137

$$\bar{x} = \frac{\iint \omega x \, dx \, dy}{\iint \omega \, dx \, dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint \omega y \, dx \, dy}{\iint \omega \, dx \, dy},$$

причем интегралы должны быть вычисляемы по площади, центр тяжести которой мы ищем.

Для случая полярных координат вышеприведенные формулы принимают вид:

$$\bar{x} = \frac{\iint \omega r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta}{\iint \omega r \, dr \, d\theta}, \quad \bar{y} = \frac{\iint \omega r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta}{\iint \omega r \, dr \, d\theta}.$$

Если плотность ω постоянна, то, вынося ω за знаки интегралов, получим формулы в более простом виде. В дальнейшем мы всюду ограничимся рассмотрением именно этого простейшего случая, а потому в нижеследующих примерах будем подразумевать ω постоянной, не оговаривая этого.

Пример 1. Найти центр тяжести сегмента эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ограниченного прямой $bx + ay = ab$ (рис. 137).

Решение. Нижний $\varphi_1(x)$ и верхний $\varphi_2(x)$ пределы для внутреннего интегрирования находим соответственно из уравнений прямой и эллипса:

$$\varphi_1(x) = \frac{ab - bx}{a}, \quad \varphi_2(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Пределами внешнего интегрирования являются $x = 0$ и $x = a$.

Вычисляем теперь интегралы, входящие в формулы, которые определяют координаты центра тяжести:

$$\int_0^a \int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} x \, dx \, dy = \int_0^a \left(\frac{b}{a} x \sqrt{a^2-x^2} - bx + \frac{bx^2}{a} \right) dx = \frac{1}{6} ba^2,$$

$$\int_0^a \int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} y \, dx \, dy = \frac{1}{a^2} \int_0^a (-b^2 x^2 + ab^2 x) dx = \frac{1}{6} b^2 a,$$

$$\int_0^a \int_{\frac{ab-bx}{a}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}} dx \, dy = \frac{1}{4} ab(\pi - 2).$$

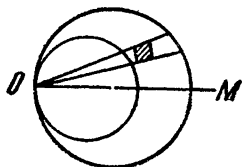


Рис. 138

Следовательно,

$$\bar{x} = \frac{2a}{3(\pi - 2)}, \quad \bar{y} = \frac{2b}{3(\pi - 2)}.$$

Пример 2. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной окружностями $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta$ (рис. 138). Предполагается $b > a$.

Решение. Из симметрии фигуры непосредственно заключаем, что $\bar{y} = 0$. Вычисляем интегралы, входящие в формулу, определяющую абсциссу x .

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho^2 \cos \theta \, d\theta \, d\rho = \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{1}{8} \pi (b^3 - a^3),$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{1}{4} \pi (b^2 - a^2).$$

Следовательно,

$$\bar{x} = \frac{b^2 + ab + a^2}{2(b + a)}.$$

ЗАДАЧИ

(Для практики рекомендуем проделать любую из задач 1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13 § 56 с помощью двойного интегрирования.)

Найти центры тяжести фигур, ограниченных линиями:

а) Петлей $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Отв. $\bar{x} = \frac{\pi \sqrt{2a}}{8}$, $\bar{y} = 0$.

б) Петлей кривой $\rho = a \sin 2\theta$.

$\bar{x} = \frac{128a}{105\pi} = \bar{y}$.

в) Кардиоидой $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

$\bar{x} = \frac{5a}{6}$, $\bar{y} = 0$.

§ 127. Моменты инерции плоской фигуры. Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от оси. Моментом инерции системы и материальных точек относительно оси называется сумма моментов инерции отдельных точек.

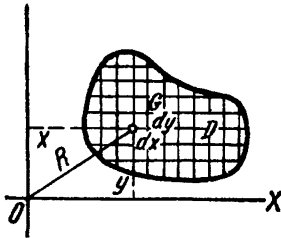


Рис. 139

Пользуясь этим определением, можем следующим образом распространить понятие момента инерции на плоскую фигуру.

Разобьем площадь данной фигуры (область D) на элементарные площадки так, как указано на рис. 139.

Пусть PG — одна из таких площадок. Обозначим координаты точки P через (x, y) . Площадь элемента равна $dx dy$. Положим раз навсегда плотность фигуры равной единице во всех точках. Тогда масса элемента

будет равна $dx dy$. Если требуется найти момент инерции относительно оси OX , то за момент инерции площадки PG можно приближенно принять произведение $y^2 dx dy$.

Тогда, следуя общему методу, за момент инерции всей фигуры относительно OX примем:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \sum y^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy.$$

Обозначая момент инерции фигуры относительно оси OX через I_x , получаем:

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy.$$

Аналогичным образом найдем:

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy.$$

Если осью, относительно которой вычисляется момент инерции, является прямая, перпендикулярная к плоскости координат, то, обозначая через R расстояние точки P от основания O этой оси (рис. 139), для момента инерции I всей фигуры таким же образом получим выражение:

$$I = \iint_D R^2 dx dy,$$

где R теперь уже является функцией аргументов x и y . Этот момент инерции называется *полярным моментом инерции*, или мо-

ментом инерции относительно точки O . Его обозначают через I_0 . Так как, очевидно, $R^2 = x^2 + y^2$, то имеем:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Последняя формула дает:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D y^2 dx dy + \iint_D x^2 dx dy = I_x + I_y.$$

Итак, получаем теорему.

Момент инерции плоской фигуры относительно начала координат равен сумме ее моментов инерции относительно осей координат, лежащих в плоскости данной фигуры.

Принимая во внимание, что элементарная площадка в полярных координатах выражается произведением $\rho d\theta d\rho$ и что $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $x^2 + y^2 = \rho^2$, получим формулы моментов инерции в полярных координатах:

$$I_x = \iint_D \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho, \quad I_y = \iint_D \rho^3 \cos^2 \theta d\theta d\rho,$$

$$I = \iint_D R^2 \rho d\theta d\rho, \quad I_0 = \iint_D \rho^3 d\theta d\rho.$$

Пример 1. Найти I_0 фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4ax$, прямой $y = 2a$ и осью OY (рис. 140).

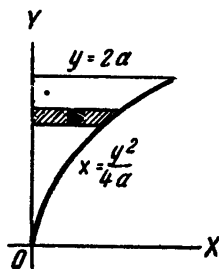


Рис. 140

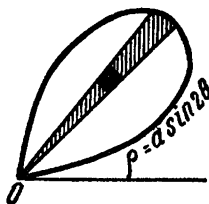


Рис. 141

Решение. Интегрируем сперва по x . Тогда, применяя формулу момента инерции относительно начала координат, получаем:

$$I_0 = \int_0^{2a} \int_0^{\frac{y^2}{4a}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{2a} \left(\frac{1}{192} \frac{y^6}{a^3} + \frac{1}{4} \frac{y^4}{a} \right) dy = \frac{178}{105} a^4.$$

Пример 2. Найти I_0 петли кривой $\rho = a \sin 2\theta$ (рис. 141).

Решение. Применяя соответствующую формулу, получаем:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \sin 2\theta} \rho^2 d\theta d\rho = \frac{1}{4} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2\theta d\theta = \frac{3}{64} \pi a^4.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти I_0 фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $y = 0$, $y = \frac{b}{a}x$.

Отв. $ab \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12} \right)$.

2. Вычислить I_0 прямоугольника, ограниченного прямыми $x = a$, $y = b$ и координатными осями.

Отв. $\frac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

3. Найти I_y эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $\frac{\pi a^3 b}{4}$.

4. Найти I_0 эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$.

5. Найти I_0 области, заключенной между прямой и параболой, осью которой является ось OX , если каждая из них соединяет начало координат с точкой (a, b) .

Отв. $\frac{ab}{4} \left(\frac{a^2}{7} + \frac{b^2}{5} \right)$.

6. Найти I_0 круга $\rho = 2a \cos \theta$.

Отв. $\frac{3}{2} \pi a^4$.

7. Найти I_0 лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Отв. $\frac{1}{8} \pi a^4$.

8. Найти I_0 площади кардионды $\rho = a(1 - \cos \theta)$.

Отв. $\frac{35\pi a^2}{16}$.

9. Найти I_x гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Отв. $\frac{21}{512} \pi a^4$.

10. Вычислить момент инерции области, ограниченной параболой $y^2 = ax$ и прямой $x = a$, относительно прямой $y = -a$.

Отв. $\frac{8}{5} a^4$.

§ 128. Общий метод вычисления площади поверхности. Метод нахождения площади поверхности, данный в § 53, приложим только к поверхностям вращения. Дадим теперь общий метод. Пусть уравнение поверхности KL на рисунке 142 будет

$$z = f(x, y),$$

и пусть требуется вычислить площадь участка S' этой поверхности.

Обозначим ортогональную проекцию S' на плоскость XOY буквой S . Проведем плоскости, параллельные YOZ и XOZ , на рас-

стояниях друг от друга, равных соответственно Δx и Δy . Эти плоскости дадут усеченные призмы (например MO), ограниченные сверху частями (например MN) данной поверхности, проекции которых на плоскость XOY суть прямоугольники площади $\Delta x \Delta y$ (например PQ), причем эти прямоугольники служат также нижними основаниями призм.

Рассмотрим теперь касательную плоскость к поверхности KL в точке M , координаты которой x, y, z .

Очевидно, тот же самый прямоугольник PQ будет проекцией на плоскость XOY части касательной плоскости (MR), высекаемой призмой MQ .

Обозначим через γ угол, образуемый нормалью к поверхности в точке M и осью OZ .

Этот угол равен углу, образуемому касательной плоскостью в точке M с плоскостью XOY ; поэтому

$$\text{пл. } PQ = \text{пл. } MR \cdot \cos \gamma,$$

[проекция площади на другую плоскость равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла между обеими плоскостями]

или

$$\Delta y \Delta x = \text{пл. } MR \cdot \cos \gamma.$$

Но

$$\cos \gamma = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

[Это есть формула косинуса угла, составляемого касательной плоскостью с плоскостью XOY . Следует заметить, что радикал в знаменателе берется со знаком плюс, т. е. в данном случае из двух углов, образованных осью OZ и нормалью к поверхности, выбирается острый.]

Следовательно,

$$\text{пл. } MR = \frac{1}{\cos \gamma} \Delta x \Delta y = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y.$$

Примем это за «элемент» площади поверхности, тогда площадь части S' поверхности понимается как число, данное следующей формулой:

$$\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} SS \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y,$$

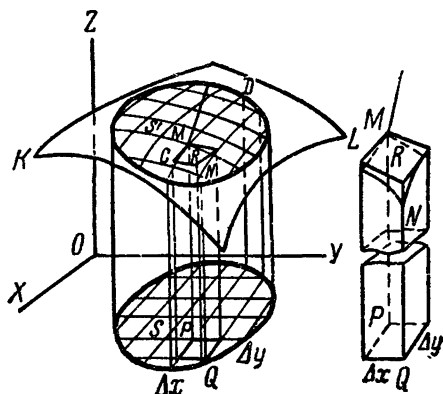


Рис. 142

причем суммирование распространяется на область S . Обозначая величину площади части S' поверхности $y = f(x, y)$ буквой A , имеем, значит:

$$A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy,$$

причем пределы интегрирования зависят от проекции на плоскость XOY той части поверхности, площадь которой вычисляем. Следовательно, пределы интегрирования даст нам кривая или кривые, ограничивающие область S в плоскости XOY , совершенно таким же образом, как мы находили их в предыдущих параграфах.

Проведенное рассуждение будет справедливо лишь при условии, что в каждой точке рассматриваемой части S' поверхности $z = f(x, y)$ имеется определенная касательная плоскость и что эти касательные плоскости, переходя непрерывно одна в другую, не занимают положения, перпендикулярного к плоскости XOY .

Аналитически эти условия сводятся к существованию непрерывных частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функций $z = f(x, y)$. При нарушении этого условия подынтегральная функция в полученной формуле не будет непрерывной функцией переменных x и y .

Если было бы удобнее проектировать рассматриваемую поверхность на плоскость XOZ , то мы имели бы формулу:

$$A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dz,$$

причем пределы найдутся из уравнения кривой, ограничивающей область S , где теперь S есть проекция части S' поверхности на плоскость XOZ .

Подобным же образом имеем:

$$A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy dz,$$

а пределы находим, проектируя рассматриваемую площадь на плоскость YOZ .

Иногда в задачах требуется вычислить площадь некоторой части одной поверхности, отсекаемую другой поверхностью. В таких случаях частные производные, фигурирующие в формулах, надо вычислять, разумеется, из уравнений той поверхности, площадь части которой мы ищем.

Так как границы области интегрирования находят проектированием части S' поверхности на одну из координатных плоскостей, то нужно помнить, что:

для нахождения проекции части S' на плоскость XOY нужно из уравнений поверхностей, пересечение которых дает замыкающую эту площадь кривую, исключить z .

Подобным же образом для нахождения границы проекции на плоскость XOZ надо исключить y , а для нахождения проекции на плоскость YOZ надо исключить x .

Пример 1. Найти поверхность шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Решение. Возьмем восьмую часть искомой площади: ABC (рис. 143). Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

и

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Проекция вычисляемой площади на плоскость XOY есть AOB , область, ограниченная линиями $x=0$ (OB), $y=0$ (AO), $x^2 + y^2 = r^2$ (BGA).

Интегрируя сперва по y , мы суммируем все элементы полосы (например $EDFC$), проектирующейся на плоскость XOY в форме также полосы ($QPFQ$), т. е. пределы y суть нуль и $PF (= \sqrt{r^2 - x^2})$. Затем, интегрируя по x , суммируем все полосы, образующие поверхность ABC , т. е. пределы x суть нуль и $OA (= r)$. Подставляя в соответствующую формулу, находим:

$$A = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r \, dx \, dy}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 4\pi r^2.$$

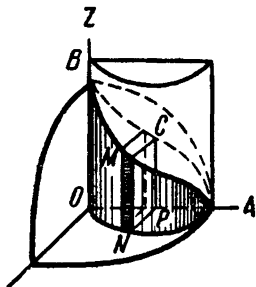


Рис. 144

Пример. Центр шара радиуса r находится на поверхности прямого цилиндра, радиус основания которого $\frac{r}{2}$. Вычислить поверхность части цилиндра, высеченной шаром.

Решение. Взяв начало координат в центре шара, образующую цилиндра за ось Z , а диаметр прямого сечения цилиндра за ось Y , найдем, что уравнение шара будет $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, а цилиндра $x^2 + y^2 = r^2/4$. Очевидно, $ONAMB$ (рис. 144) есть четверть искомой цилиндрической поверхности. Так как эта поверхность проектируется на плоскость XOY в виде дуги ONA полуокруга, то на этой плоскости нет области S , по которой можно было бы определить пределы интегрирования в этой плоскости; поэтому проектируем нашу поверхность, например, на плоскость YOZ . Область S , на которую распространяется интегрирование, будет $OACB$, ограниченная в плоскости YOZ

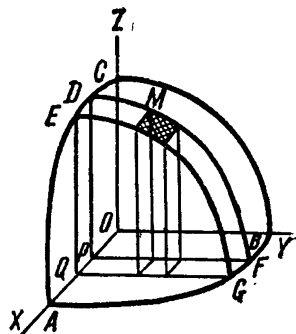


Рис. 143

линиями $z=0$ (OA), $y=0$ (OB), $z^2+ry=r^2$ (ACB), причем последнее уравнение найдем, исключив x из уравнений обеих поверхностей. Интегрируя сперва по z , что означает суммирование всех элементов вертикальной плоскости (например MN), будем иметь пределы для z нуль и $\sqrt{r^2-ry}$. Затем интегрируем по y , т. е. суммируем все эти полосы, причем пределами будут 0 и r .

Так как искомая поверхность лежит на цилиндре, то частные производные, требуемые соответствующей формулой настоящего параграфа, должны быть найдены из уравнения цилиндра.

Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{r-2y}{2x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-ry}} \left[1 + \left(\frac{r-2y}{2x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz dy.$$

Подставляя значение x в функции y из уравнения цилиндра, найдем:

$$A = 2r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-ry}} \frac{dy dz}{\sqrt{ry-y^2}} = 2r \int_0^r \frac{\sqrt{r^2-ry}}{\sqrt{ry-y^2}} dy = 2r \int_0^r \sqrt{\frac{r}{y}} dy = 4r^2.$$

ЗАДАЧИ

1. В последнем примере вычислить площадь части шаровой поверхности, отсекаемую цилиндром.

$$\text{Отв. } 4r \int_0^r \int_0^{\sqrt{ry-r^2}} \frac{dx dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 2 = (\pi-2)r^2.$$

2. Оси двух равных прямых круглых цилиндров, у которых основания имеют радиус r , пересекаются под прямым углом; найти площадь части поверхности одного цилиндра, отсекаемую другим.

У к а з а н и е. Уравнение цилиндров пусть будет

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

$$\text{Отв. } 8r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 8r^2.$$

3. Найти часть площади поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, заключенную между плоскостями $x = -8$ и $x = 6$. Отв. 280π .

4. Найти часть площади поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$, содержащуюся плоскостями $z = mx$ и плоскостью XOY . Отв. $4r^2 m$.

5. Найти площадь поверхности $z^2 + (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = r^2$, содержащуюся в первом октанте. Отв. $\frac{r^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

6. Найти площадь части плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

$$\text{Отв. } \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}.$$

7. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 4ax$, отсекаемой цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = 3a$.

$$\text{Отв. } \frac{112}{9} \pi a^2.$$

8. Найти площадь части поверхности цилиндра $y^2 = ax$, отсекаемой параболоидом $y^2 + z^2 = 4ax$ и плоскостью $x = 3a$.

$$\text{Отв. } (13\sqrt{13} - 1) \frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

9. Найти площадь цилиндрической поверхности

$$y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

отсекаемой поверхностью, проектирующейся на плоскость XOY в виде кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

$$\text{Отв. } \frac{12}{5} a^2.$$

10. Найти площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 2au$, отсекаемой конусом $x^2 + z^2 = y^2$.

$$\text{Отв. } 2\pi a^2.$$

§ 129. Нахождение объемов посредством тройного интегрирования. Иногда объем тела, ограничиваемого поверхностями, уравнения которых даны, можно вычислить посредством трех последовательных интегрирований, — процессом, который есть просто расширение метода, изложенного в предыдущих параграфах этой главы.

Представим себе, что рассматриваемое тело разделено на прямоугольные параллелепипеды, с ребрами Δx , Δy , Δz , плоскостями, параллельными плоскостям координат. Объем одного из таких параллелепипедов будет равен $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, и мы примем его за *элемент* объема.

Будем теперь суммировать все такие элементы внутри области R , ограниченной данными поверхностями, суммируя *сначала* все элементы столбца, параллельного одной из координатных осей; *затем* суммируя все такие столбцы, заполняющие слой, параллельный одной из координатных плоскостей, содержащих эту ось; *наконец* суммируя все такие слои, распространяя это суммирование на всю рассматриваемую область. Объем V тела будет, следовательно, пределом этой тройной суммы, по мере того как Δz , Δy , Δx , каждое, приближается к пределу нуль, т. е.

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum \sum \sum_{R} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (1)$$

причем суммирование распространяется на всю область R , ограниченную данными поверхностями; обычно вместо (1) пишут:

$$V = \iiint_R dx dy dz, \quad (2)$$

причем пределы интегрирования зависят от уравнений ограничивающих поверхностей.

Таким образом, обобщая сказанное в начале § 125, мы рассматриваем объем как результат интегрирования постоянной функции $f(x, y, z) = 1$, распространенного на всю данную область. Но часто некоторые задачи требуют интегрирования уже *переменной* функции от x, y, z , распространенного на всю область, что обозначается символом

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz, \quad (3)$$

каковой, разумеется, есть предел некоторой тройной суммы, аналогичной уже исследованной нами двойной сумме. Метод вычисления такого тройного интеграла совершенно аналогичен уже рассмотренному в § 122 методу вычисления двойного интеграла.

Пример 1. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Пусть восьмая часть эллипсоида будет $OABC$ (рис. 145); уравнения ограничивающих поверхностей будут:

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (ABC),
- 2) $z = 0$ (OAB),
- 3) $y = 0$ (OAC),
- 4) $x = 0$ (OBC).

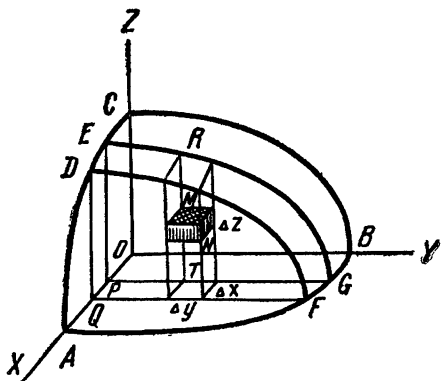


Рис. 145

MN есть элемент, т. е. один из прямоугольных параллелепипедов с ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, на которые область разделяется плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Интегрируя сперва по z , мы составляем сумму всех таких элементов в столбце (например RT), причем пределами интегрирования будут нуль [из 2)] и

$$TR = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

[из 1), решая относительно z].

Интегрируя затем по y , мы суммируем все такие столбцы в слое $DEPQFG$, причем пределами y будут нуль [из 3)] и $PG = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ (из уравнения кривой AGB , а именно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, решенного относительно y).

Наконец, интегрируя по x , мы составляем сумму всех таких слоев в целой области $OABC$, причем пределами для x будет нуль [из 4)] и $OA = a$.

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz = \\ &= c \int_0^a \int_0^b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx dy, \\ V &= \frac{8\pi cb}{4a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

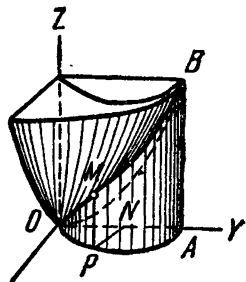


Рис. 146

Пример 2. Найти объем тела, заключенного между параболоидом вращения $x^2 + y^2 = az$, цилиндром $x^2 + y^2 = 2ay$ и плоскостью $z = 0$ (рис. 146).

Решение. Пределы для z суть нуль и PM ($= \frac{x^2 + y^2}{a}$, найденное решением уравнения параболоида относительно z).

Пределы для x суть нуль и NP ($= \sqrt{2ay - y^2}$, найденное решением уравнения цилиндра относительно x).

Пределы для y суть нуль и OA ($= 2a$).

Эти пределы относятся к телу $OPAB$, составляющему половину требуемого. Следовательно,

$$V = 2 \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ay - y^2}} \int_0^{\frac{x^2 + y^2}{a}} dy dx dz = \frac{3}{2} \pi a^3.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти объем одного из клиньев, вырезаемых из цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$ плоскостями $z = 0$ и $z = mx$.

$$\text{Отв. } 2 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \int_0^{mx} dx dy dz = \frac{2}{3} r^3 m.$$

2. Найти объем прямого эллиптического цилиндра, ось которого совпадает с осью OX , а высота равна $2a$, если уравнение основания есть $c^2 y^2 + b^2 z^2 = b^2 c^2$.

$$\text{Отв. } 2 \int_0^a \int_0^{\frac{c}{b} \sqrt{b^2 - y^2}} \int_0^{\frac{c}{b} \sqrt{b^2 - y^2}} dx dy dz = 2\pi abc.$$

3. Найти весь объем, ограниченный поверхностью

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\text{Отв. } \frac{abc}{90}.$$

4. Найти весь объем, ограниченный поверхностью $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

$$\text{Отв. } \frac{4\pi a^3}{35}.$$

5. Найти объем, вырезаемый в шаре радиуса a прямым круговым цилиндром, у которого радиус основания есть b , а ось проходит через центр шара.

$$\text{Отв. } \frac{4}{3} \pi \left[a^3 - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} \right].$$

6. Центр шара радиуса r лежит на поверхности прямого кругового цилиндра, у которого радиус основания есть $\frac{r}{2}$. Найти объем части цилиндра, вырезаемой шаром.

$$\text{Отв. } \frac{2}{3} \pi r^3.$$

7. Найти объем, ограниченный гиперболическим параболоидом $cz = xy$, плоскостью XOY и плоскостями $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$.

$$\text{Отв. } \frac{(a_2^3 - a_1^3)(b_2^3 - b_1^3)}{4c}.$$

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями двух цилиндров $x^2 + y^2 = r^2$ и $x^2 + z^2 = r^2$.

$$\text{Отв. } \frac{16}{3} r^3.$$

9. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $y^2 + z^2 = 4ax$ и поверхностью цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

$$\text{Отв. } 2\pi a^3 + \frac{16}{3} a^3.$$

10. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 - z = 1$ и плоскостью XOY .

$$\text{Отв. } \frac{\pi}{2}.$$

11. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $y^2 + z^2 = 4ax$, цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = 3a$.

$$\text{Отв. } (6\pi + 9\sqrt{3}) a^3.$$

12. Найти объем, ограниченный плоскостью $z = 0$, поверхностью цилиндра $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ и гиперболическим параболоидом $xy = cz$.

$$\text{Отв. } \frac{\pi ab r^2}{c}.$$

13. Найти объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$ и поверхностями $x^2 + y^2 = 4az$, $x^2 + y^2 = 2cx$.

$$\text{Отв. } \frac{3\pi c^4}{8a}.$$

14. Найти объем тела в первом октанте, ограниченного поверхностями $xy = az$, $x + y + z = a$.

$$\text{Отв. } \left(\frac{17}{12} - \ln 4 \right) a^3.$$

15. Найти объем, содержащийся между плоскостью $z = 0$, цилиндром $y^2 = 2cx - x^2$ и параболоидом $ax^2 + by^2 = 2z$.

$$\text{Отв. } \frac{\pi c^4}{8} (5a + b).$$

ГЛАВА X

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 130. Обозначение криволинейного интеграла. Оно таково:

$$(L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy, \quad (1)$$

где P и Q суть *непрерывные* функции, определенные на дуге L , интегрирование совершается вдоль этой дуги в направлении от ее начальной точки M_0 к ее конечной точке M . Эти две концевые точки называются *пределами* криволинейного интегрирования (рис. 147).

Когда, в частном случае, за путь L интегрирования берут отрезок $[a, b]$ оси абсцисс OX , тогда криволинейный интеграл (1) становится обыкновенным *определенным интегралом*

$$\int_a^b P dx \quad (2)$$

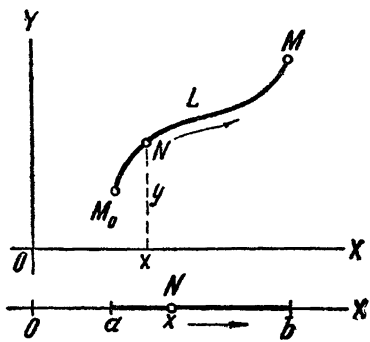


Рис. 147

от непрерывной функции P , определенной на прямолинейном отрезке $[a, b]$, взятом между пределами a и b , в направлении от a к b .

Таким образом,

криволинейный интеграл является расширением обычного определенного интеграла, который, с этой точки зрения, оказывается берущимся вдоль прямолинейного отрезка, лежащего на оси абсцисс.

§ 131. Происхождение криволинейного интеграла. Оно совершенно аналогично возникновению обыкновенного, т. е. *прямолинейного*, определенного интеграла.

Напомним вкратце это последнее. На отрезке $[a, b]$ оси абсцисс нами была взята непрерывная функция $F(x)$, имеющая *непрерывную* производную $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$ (рис. 148).

Этот отрезок $[a, b]$ мы разделили на n малых отрезков точками деления x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и написали тождество:

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(b) - F(x_{n-1})].$$

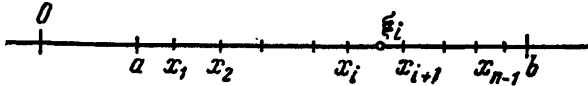


Рис. 148

Общий член $F(x_{i+1}) - F(x_i)$ этой суммы мы изображали, на основании теоремы о среднем Лагранжа, в виде:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

так что предыдущее тождество приняло вид:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Наконец, делая $n \rightarrow +\infty$ и вместе с этим длины Δx_i всех отрезков стремящимися к нулю, мы в пределе получили формулу Лейбница — Ньютона:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

дающую разность двух значений первообразной $F(x)$ по ее производной $f(x)$.

Точно так же возникает и *криволинейный интеграл*. Пусть на плоскости XOY лежит некоторая кривая дуга AB , не пересекающая саму себя и вместе с тем «гладкая», т. е. имеющая непрерывно перемещающуюся вдоль нее касательную

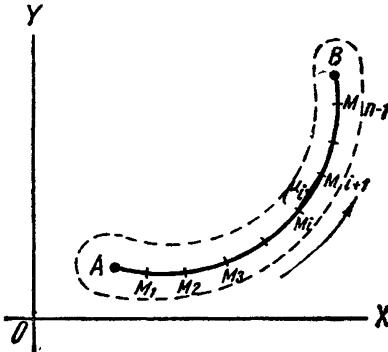


Рис. 149

или состоящая из конечного числа таких гладких частей. Пусть на этой плоскости XOY вдоль дуги AB и *вблизи нее* дана непрерывная функция $F(x, y)$ от двух независимых переменных x, y , имеющая там же непрерывные частные производные *двух* первых порядков (рис. 149).

Делим дугу AB на n малых дуг точками деления M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , где точка M_i имеет x_i, y_i своими координатами, причем начальную точку A и конечную точку B , для симметрии обозначений, пишем с их координатами в виде $M_0(x_0, y_0)$ и $M_n(x, y)$. Обозначив через F_i численное значение функции $F(x, y)$ в точке M_i ,

т. е. положив $F_i = F(x_i, y_i)$, $F_0 = F(x_0, y_0)$ и $F = F(x, y)$, мы имеем тождество:

$$F - F_0 = [F_1 - F_0] + [F_2 - F_1] + [F_3 - F_2] + \dots + [F - F_{n-1}]. \quad (1)$$

Общий член $F_{i+1} - F_i$ этого тождества, написанный в развернутом виде, есть

$$F_{i+1} - F_i = F(x_{i+1}, y_{i+1}) - F(x_i, y_i).$$

На основании теоремы о среднем Лагранжа, он в точности равен:

$$F'_x(x_i + \theta_i \Delta x_i, y_i + \theta_i \Delta y_i) \cdot \Delta x_i + F'_y(x_i + \theta_i \Delta x_i, y_i + \theta_i \Delta y_i) \cdot \Delta y_i,$$

где θ_i есть величина средняя, заключенная между 0 и 1. Геометрически, точка μ_i , имеющая своими координатами $x_i + \theta_i \Delta x_i$, $y_i + \theta_i \Delta y_i$, лежит на хорде $M_i M_{i+1}$, соединяющей концы M_i, M_{i+1} кривой дуги $M_i M_{i+1}$. Для краткости координаты точки μ_i будем обозначать через ξ_i и η_i , положив

$$\xi_i = x_i + \theta_i \Delta x_i, \quad \eta_i = y_i + \theta_i \Delta y_i.$$

Таким образом, мы имеем:

$$F_{i+1} - F_i = F'_x(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i + F'_y(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i. \quad (2)$$

Поэтому тождество (1) напишется в виде:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \sum_{i=0}^{i=n} [F'_x(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + F'_y(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]. \quad (1^*)$$

Заметим, что равенство (1*) есть *абсолютно точное* благодаря специальному выбору точки $\mu_i(\xi_i, \eta_i)$ на хорде $M_i M_{i+1}$ по теореме о среднем Лагранжа. Если же мы точку $\mu_i(\xi_i, \eta_i)$ сдвинем в другое место хорды $M_i M_{i+1}$ или же перенесем куда-нибудь на саму кривую дугу $M_i M_{i+1}$, тогда, разумеется, равенство (1*) нарушится. Однако, в силу непрерывности *обоих частных производных* $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ нарушение равенства (*) будет тем незначительнее, чем меньше будут все дуги $M_i M_{i+1}$, так что в пределе, когда мы заставляем n безгранично увеличиваться, а все дуги $M_i M_{i+1}$ безгранично умаляться, нарушенное равенство (1*) восстановится¹.

¹ Совершенно аналогичное явление, как мы знаем, происходит в обычном определенном интеграле, где сдвиг средних точек ξ_i Лагранжа оказывает влияние лишь на *конечные* допределенные интегральные суммы, но безразличен для самого их предела.

Предел правой части равенства (1*) называется *криволинейным интегралом* и обозначается символом

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy, \quad (3)$$

так что равенство (1*) напишется теперь в виде:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy. \quad (I)$$

Обычно частную производную $\frac{\partial F}{\partial x}$ обозначают буквой P и $\frac{\partial F}{\partial y}$ обозначают через Q ; следовательно, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть две *непрерывные функции независимых переменных x, y , определенные вдоль дуги AB и вблизи нее и служащие частными производными некоторой функции $F(x, y)$* :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q. \quad (4)$$

Формула (I) теперь получает вид:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \quad (I^*)$$

где нужно помнить, что *дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом функции $F(x, y)$* .

Только с этой оговоркой формула (I*) верна и является в этом случае истинным расширением формулы Лейбница — Ньютона и распространением ее на криволинейные пути интегрирования. Если же дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ не является полным дифференциалом, то тогда формула (I*) вполне бессмысленна, потому что, хотя криволинейный интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

стоящий в правой части, и имеет определенное численное значение, будучи существующим пределом интегральной суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i^*, \eta_i^*) \Delta x_i + Q(\xi_i^*, \eta_i^*) \Delta y_i,$$

однако неизвестно, что он собой выражает, ибо функции $F(x, y)$, имеющей $P dx + Q dy$ своим полным дифференциалом, теперь уже нет¹.

Так как x_0, y_0 суть координаты начальной точки M_0 дуги AB , а x, y координаты конечной ее точки M , то формулу (I*) нередко пишут в виде:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy, \quad (I^{**})$$

подставляя в качестве пределов интегрирования обозначения начальной и конечной точек дуги, вдоль которой ведется интегрирование, а впереди знака криволинейного интеграла ставя в скобках указание на тот криволинейный путь, по которому совершается интегрирование.

Нередко указывают на чертеже стрелкой то направление, по которому интегрируют: эта стрелка ставится вдоль дуги, от начальной ее точки M_0 к конечной точке M (см. рис. 149).

Формула (I**) показывает, что криволинейное интегрирование охватывает, как частный случай, обычное (прямолинейное) интегрирование, ибо, когда за криволинейный путь (L) берут кусок (отрезок) оси абсцисс $[a, b]$; тогда в формуле (I**) нужно опустить букву y , положив: $y=0$, $dy=0$, $P(x, 0)=f(x)$, $F(x, 0)=F(x)$, $M_0=a$, $M=x$, и тогда мы получим формулу Лейбница — Ньютона:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx.$$

Вся разница прямолинейного и криволинейного интегрирования состоит в том, что в первом случае дифференциальное выражение $f(x)dx$ *всегда есть* дифференциал некоторой функции $F(x)$, тогда как во втором случае дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ *очень редко* является полным дифференциалом и, чтобы это было так, нужно соблюдение специальных ограничений, налагаемых на функции P и Q .

§ 132. Вычисление криволинейного интеграла. Это вычисление ведется методом формального «выпрямления» данного криволинейного интеграла:

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (5)$$

¹ Здесь точка $\mu_i^*(\xi_i^*, \eta_i^*)$ уже не дается теоремой Лагранжа (неприменимой теперь за отсутствием функции $F(x, y)$, ибо $P dx + Q dy$ уже не есть полный дифференциал) и является просто произвольной точкой кривой дуги $M_i M_{i+1}$.

т. е. превращения его в обычный прямолинейный интеграл при помощи надлежащей подстановки.

Для этого прежде всего в формуле (5) сделаем различие переменных интегрирования от переменных x, y , написанных в верхнем пределе:

$$I = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\alpha, \beta) d\alpha + Q(\alpha, \beta) d\beta. \quad (5^*)$$

Первый способ. За ведущий параметр s интегрирования берем длину дуги $s = AN$, отсчитываемой от начальной точки A до движущейся точки N , описывающей кривую AB (рис. 150). Координаты α, β точки N поэтому предполагаются функциями от дуги s . Деля и умножая подынтегральное выражение формулы (5*) на ds и

вспоминая, что $\frac{d\alpha}{ds} = \cos \mu$ и $\frac{d\beta}{ds} = \sin \mu$, где μ есть наклон касательной в точке N к горизонту и, следовательно, определенная функция от дуги s , мы имеем окончательно:

$$I = \int_0^l [P(\alpha, \beta) \cos \mu + Q(\alpha, \beta) \sin \mu] ds. \quad (6)$$

Здесь l есть длина целой дуги AB .

Формула (6) и приводит вычисление криволинейного интеграла I к вычислению обыкновенного определенного интеграла. Заметим, что здесь P и Q суть *любые* непрерывные функции от x, y , так что дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ может и не быть полным дифференциалом.

Второй способ. За ведущий параметр интегрирования принимаем любой параметр t , так что α и β предполагаются известными функциями от t :

$$\alpha = \varphi(t) \quad \text{и} \quad \beta = \psi(t). \quad (7)$$

Когда $t = a$, точка $N(\alpha, \beta)$ предполагается совпадающей с начальной точкой A дуги AB ; когда $t = b$, точка $N(\alpha, \beta)$ предполагается пришедшей в конечную точку B дуги AB . Когда t *возрастает* от a до b , точка $N(\alpha, \beta)$ предполагается описывающей дугу AB постоянно в одном направлении от точки A к точке B .

Преобразуя криволинейный интеграл (5*) подстановкой (7), мы получаем:

$$I = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] \cdot dt. \quad (8)$$

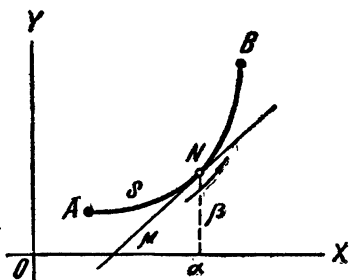


Рис. 150

Производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ предполагаются непрерывными всюду на $[a \leq t \leq b]$, кроме ограниченного числа точек, ибо предполагается, что дуга AB или вся целиком гладкая, или состоит из конечного числа гладких дуг. Формула (8) также сводит вычисление криволинейного интеграла к вычислению обыкновенного определенного интеграла.

§ 133. Случай, когда криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, но зависит только от положения конечных точек. Пусть на плоскости XOY имеется какая-нибудь непрерывная замкнутая кривая K , не пересекающая сама себя (рис. 151). Пусть внутри K даны две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, непрерывные в каждой внутренней точке. В этих условиях криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy$, взятый между какими-нибудь двумя точками M_0 и M , лежащими внутри K , по пути, который также находится *весь* внутри K , является вполне определенной величиной. Но если мы, *сохраняя неподвижными конечные точки* M_0 и M , будем изменять путь интегрирования, взяв сначала, например, путь L , а потом путь L^* , то величина криволинейного интеграла может очень измениться, потому что, вообще,

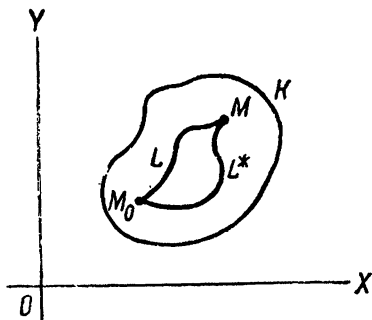


Рис. 151

$$(L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy \neq (L^*) \int_{M_0}^M P dx + Q dy.$$

С такими криволинейными интегралами, которые изменяют свою величину от изменения пути интегрирования, нам нечего делать. Поэтому следует поставить вопрос о том, *когда величина криволинейного интеграла не зависит от пути (L) интегрирования, а только от положения его концов.*

С этим явлением независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования мы уже встретились в § 131, когда доказали формулу

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy, \quad (I^{**})$$

где $F(x, y)$ есть непрерывная функция от двух независимых переменных x, y *внутри которых* K вместе со своими частными

производными первых двух порядков, и где дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал dF этой функции.

В самом деле, правая часть формулы (I**) есть криволинейный интеграл, взятый по пути L от заданной неподвижной точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей внутри контура K (рис. 152), до любой фиксированной точки $M(x, y)$, также помещенной внутри K , причем по пути интегрирования L требуется лишь одно: чтобы он *весь* целиком лежал внутри контура K , не имея на нем никаких точек; в противном же путь L может быть *произвольным*.

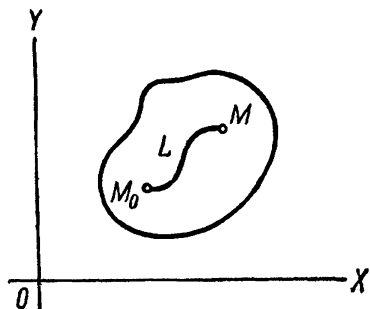


Рис. 152

Левая же часть формулы (I**) есть численная величина, от пути интегрирования L совершенно не зависящая, но зависящая лишь от его концевых точек M и M_0 .

Для большего понимания этой исключительно важной формулы (I**) мы должны добавить, что функция $F(x, y)$ имеет своим полным дифференциалом dF заданное дифференциальное выражение $P dx + Q dy$, стоящее под знаком криво-

линейного интеграла, и что хотя таких функций $F(x, y)$ имеется бесчисленное множество (если, вообще, имеется из них хотя одна, ибо таких функций $F(x, y)$ может и совсем не оказаться), но *все они отличаются одна от другой на постоянную величину*, так что разность значений их в заданных точках M и M_0 есть *одна и та же*, какую бы функцию $F(x, y)$, имеющую $P dx + Q dy$ своим полным дифференциалом, мы ни брали.

В самом деле, если $F^*(x, y)$ — какая-нибудь другая непрерывная функция, имеющая внутри контура K то же самое выражение $P dx + Q dy$ своим полным дифференциалом, тогда имеем:

$$dF = P dx + Q dy \quad \text{и} \quad dF^* = P dx + Q dy,$$

откуда $d(F^* - F) = 0$. Следовательно, разность $F^* - F$ есть непрерывная функция внутри контура K , имеющая полный дифференциал внутри K равным нулю. Отсюда следует, что эта разность есть *величина постоянная* внутри K , т. е. имеем $F^* - F = C$, откуда $F^* = F + C$ всюду внутри K . Поэтому мы должны иметь равенство:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = F^*(x, y) - F^*(x_0, y_0),$$

и, значит, левая часть формулы (I**) не зависит ни от пути интегрирования, ни от той функции F , которую выбирают среди имеющих

выражение $P dx + Q dy$ своим полным дифференциалом. Из сказанного следует предложение.

Прямая теорема. Если выражение $P dx + Q dy$ является внутри контура K полным дифференциалом, тогда криволинейный интеграл

$$\int_{M_0}^M P dx + Q dy$$

не зависит от пути интегрирования L , выходящего из M_0 и примыкающего к точке M , лишь бы этот путь целиком лежал внутри контура K , не имея на нем ни одной точки.

Из того, что было изложено, ясно, что в этом случае криволинейный интеграл

$$\int_{M_0}^M P dx + Q dy$$

как раз и является той самой непрерывной внутри K функцией, которая имеет подынтегральное выражение $P dx + Q dy$ своим полным дифференциалом. Функция эта, очевидно, уничтожается в точке M_0 .

Обратная теорема. Если криволинейный интеграл

$$\int P dx + Q dy$$

не зависит, внутри контура K , от пути интегрирования, а зависит только от положения его конечных точек, тогда подынтегральное выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал внутри K .

Доказательство. Пусть криволинейный интеграл

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

взятый от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$ до переменной точки $M(x, y)$, не зависит от пути интегрирования L , ведущего от M_0 к M . Тогда такой криволинейный интеграл нужно рассматривать как некоторую функцию $F(x, y)$ переменных x и y , непрерывную внутри контура K .

Найдем ее частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$.

Чтобы иметь численное значение $F(x + \Delta x, y)$ функции F , мы должны взять какой-нибудь путь, выходящий из неподвижной точки M_0 и оканчивающийся в точке $M'(x + \Delta x, y)$.

Этот путь мы составляем из двух частей: из основного пути L , выходящего из M_0 и оканчивающегося в M , и из добавочного прямолинейного отрезка (рис. 153) MM' . Имеем поэтому:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y) &= (L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy + (MM') \int_M^{M'} P dx + Q dy = \\ &= F(x, y) + \int_x^{x+\Delta x} P(\alpha, y) d\alpha, \end{aligned}$$

ибо вдоль отрезка MM' имеем: $dy = 0$, потому что y есть постоянное, а переменное интегрирования α изменяется от x до $x + \Delta x$.

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} &= \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(\alpha, y) d\alpha. \end{aligned}$$

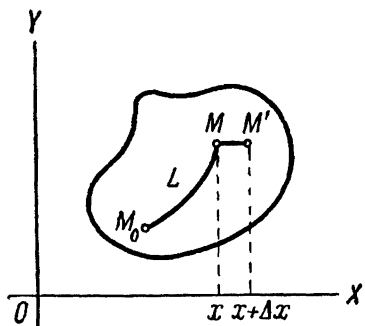


Рис. 153

Так как P есть непрерывная функция внутри K , то правая часть этого равенства является величиной, содержащейся между наибольшим и наимень-

шим значением функции $P(x, y)$ на отрезке MM' : это утверждение есть просто теорема о среднем в интегральном исчислении (см. § 35). Когда $\Delta x \rightarrow 0$, тогда, в силу непрерывности функции P , оба указанные наибольшее и наименьшее значения функции P на отрезке MM' стремятся к значению функции P в точке M как к пределу; следовательно, имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} = P(x, y).$$

Иначе говоря, находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P. \quad (1)$$

Аналогичным способом мы находим:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q. \quad (2)$$

Отсюда следует, что выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал криволинейного интеграла

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

рассматриваемого как функция своего верхнего предела $M(x, y)$, ч. т. д.

Отсюда следует важное предложение, имеющее частое применение в физике.

Теорема. Условие необходимое и достаточное, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом внутри контура K , состоит в том, чтобы криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy$, взятый по любой замкнутой кривой Γ , лежащей внутри контура K , был нулем.

Доказательство. В самом деле, в силу предыдущих прямой и обратной теорем, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом внутри контура K , необходимо и достаточно, чтобы всякие два криволинейные интеграла

$$(L) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy$$

и

$$(L^*) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy,$$

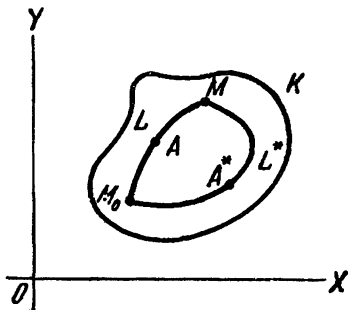


Рис. 154

взятые по различным путям L и L^* , исходящим из точки M_0 и оканчивающимся в точке M , оказались бы *равными* по численной величине (рис. 154). Так как перестановка пределов криволинейного интегрирования равносильна перемене *направления* этого интегрирования, т. е. равносильна перемене знака всеми элементами интегрирования, без изменения их абсолютной величины, то имеем:

$$(L) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy = - (L^*) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy,$$

и отсюда выводим равенство, обозначив через Γ замкнутый путь интегрирования $M_0A^*MA M_0$:

$$\begin{aligned} (\Gamma) \int Pdx + Qdy &= (L^*) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy + (L) \int_M^{M_0} Pdx + Qdy = \\ &= (L^*) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy - (L) \int_{M_0}^M Pdx + Qdy = 0, \end{aligned}$$

ибо уменьшаемое равно вычитаемому.

Таким образом, утверждать независимость криволинейного интегрирования от формы пути интегрирования — это означает утверждать, что криволинейный интеграл $(\Gamma) \int P dx + Q dy$ по любому замкнутому пути (Γ) будет нулем. Это и доказывает предложение.

Ч. т. д.

Примечание. Эта важная теорема безусловно верна, когда контур K ограничивает площадь S без отверстий, т. е. когда он непрерывен, не имея никаких оторванных друг от друга частей. Следовательно, предполагается, что контур K может быть описан сразу весь непрерывным движением кончика (точки) карандаша, не отрывающегося от плоскости, на которой он вычерчивает кривую K . Таков, например, случай, когда K есть окружность или эллипс.

Но теорема становится ложной, когда контур K ограничивает площадь S с дырками (черт. 155 вверху). В этом случае контур K составлен из оторванных друг от друга кривых K_1 , K_2 и K_3 , ибо он должен служить и внешней границей площади S , и в то же самое время быть границей для ее отверстий: $K = K_1 + K_2 + K_3$. Для такого рода контуров K теорема легко может оказаться неверной, ибо замкнутая кривая Γ' , по которой берется криволинейный интеграл $(\Gamma') \int P dx + Q dy$, может охватывать дырку, и тогда этот интеграл может отличаться от нуля. Он должен быть нулем лишь в том случае, когда кривая Γ' может быть непрерывным движением стянута в одну точку внутри площади S , не проходя при этом через отверстия этой площади, но минуя их. Такой интеграл $(\Gamma') \int P dx + Q dy$ обязан быть нулем.

Пример. Выражение

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

есть полный дифференциал от функции $\arctg \frac{y}{x}$. Это легко проверить, ибо

$$d \arctg \frac{y}{x} = \frac{d \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

И, однако, криволинейный интеграл от этого выражения, взятый по окружности Γ , имеющей центром начало O и какой-нибудь радиус R , оказывается равным не нулю, а 2π . Это также легко проверить. Положим

$$I = (\Gamma) \int \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} d\alpha + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} d\beta.$$

За ведущий параметр интегрирования принимаем угол θ , образуемый радиусом ON с положительной частью оси OX . Имеем:

$$\alpha = R \cos \theta, \quad \beta = R \sin \theta, \quad d\alpha = -R \sin \theta d\theta, \quad d\beta = R \cos \theta d\theta, \quad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Сделав эти подстановки, находим:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin \theta \cdot -R \sin \theta}{R^2} d\theta + \frac{R \cos \theta \cdot R \cos \theta}{R^2} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Это кажущееся противоречие теореме о нулевой величине интеграла $(\Gamma) \int P dx + Q dy$ по всякому замкнутому пути Γ объясняется следующим образом: в рассматриваемом случае функции

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

разрывны в начале координат O , т. е. в точке $x=0, y=0$. Поэтому площадь S , в каждой точке $M(x, y)$ которой обе функции P и Q обязаны быть непрерывными, ни в каком случае не может содержать начало O . Если за такую площадь S мы примем так называемое «кольцо», т. е. часть плоскости между двумя concentрическими окружностями K_1 и K_2 (рис. 155 внизу), то эта площадь S имеет одну внутреннюю дырку, контур K этой площади S — разрывный, ибо состоит из двух concentрических окружностей K_1 и K_2 , $K = K_1 + K_2$. Поэтому нет никаких оснований ожидать, что интеграл

$$I = (\Gamma) \int P dx + Q dy,$$

взятый по окружности Γ , содержащей дырку, будет нулем. И в самом деле, мы получили $I = 2\pi$.

§ 134. Аналитический признак полного дифференциала. Этот аналитический признак очень прост и дается предложением:

Теорема. Для того чтобы выражение $P dx + Q dy$, где P и Q — непрерывные функции вместе с их первыми производными внутри контура K , было полным дифференциалом всюду внутри K от какой-нибудь непрерывной функции $F(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы всюду внутри K выполнялось тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условие необходимо.

В самом деле, если выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал от некоторой непрерывной функции $F(x, y)$, то мы должны иметь тождество:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = P dx + Q dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

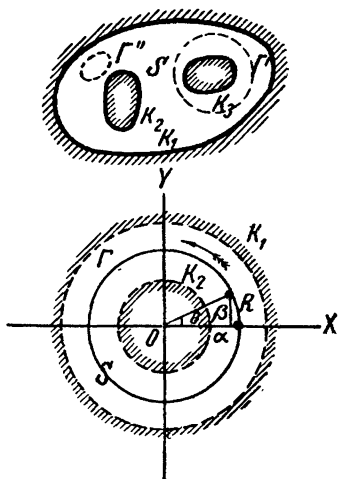


Рис. 155

А так как численная величина частной производной $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ от порядка дифференцирований не зависит, то имеем *всюду внутри* K тождество

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

которое, очевидно, переписывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad \text{ч. т. д.}$$

Гораздо труднее обратное предложение (т. е. *достаточность* этого условия), и это требует предварительной леммы.

Лемма. Если внутри контура K имеем *всюду* тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и если π есть какой-нибудь прямоугольник, имеющий стороны, параллельные осям координат, и содержащийся целиком внутри K , то тогда выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал на всем прямоугольнике π (т. е. считая и его внутренность, и его периметр).

Доказательство. За начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ пути интегрирования берем нижнюю левую вершину прямоугольника π , за конечную точку этого пути берем какую-нибудь точку $M(x, y)$ прямоугольника. Самый путь L интегрирования составлен из двух прямоугольных звеньев: из горизонтального звена M_0R и вертикального звена RM (рис. 156).

Имеем:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= (L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy = \\ &= \int_{x_0}^x P(\alpha, y_0) d\alpha + \int_{y_0}^y Q(x, \beta) d\beta. \end{aligned}$$

Ясно, что $I(x, y)$ есть *непрерывная* функция всюду на π . Вычислим первые частные производные от $I(x, y)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q(x, \beta)}{\partial x} d\beta = P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P(x, \beta)}{\partial \beta} d\beta = \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y) \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial I}{\partial y} = Q(x, y).$$

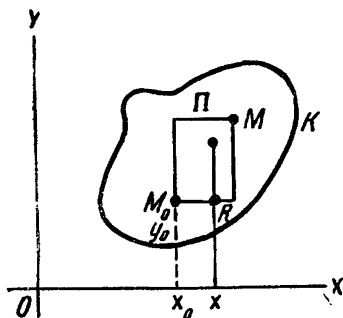


Рис. 156

Отсюда следует, что выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал от непрерывной функции $I(x, y)$ всюду на π . ч. т. д.

Теперь мы можем перейти к доказательству второй половины сформулированной теоремы.

Условие достаточно.

Пусть всюду внутри контура K имеем удовлетворенным тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Надо доказать, что выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал на целой внутренности контура K . Для этого достаточно доказать, что криволинейный интеграл

$$(\Gamma) \int P dx + Q dy$$

по любой замкнутой кривой Γ , лежащей внутри контура K , равен нулю.

Здесь полезно сделать предварительное применение: пусть S и S^* — какие нибудь две области, ограниченные соответственно замкнутыми контурами $ABCA$ и $DCBD$, имеющими общую часть BC .

Пусть I и I^* — два криволинейные интеграла от выражения $P dx + Q dy$, взятые, соответственно, по этим контурам, причем интегрирование совершается по каждому контуру в *положительном направлении*, т. е. так, чтобы наблюдатель, обходящий контур в этом направлении, имел ограничиваемую им область постоянно с *левой* руки. На рисунке 157 направление каждого интегрирования указано стрелками. Ясно, что общая граница BC будет при этом пройдена два раза и, что очень важно, в *противоположных направлениях*. Поэтому мы будем иметь, сложив оба интеграла I и I^* :

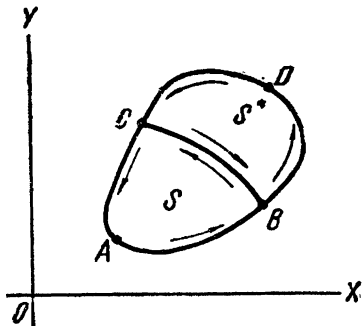


Рис. 157

$$\begin{aligned} I + I^* &= (ABCA) \int P dx + Q dy + (DCBD) \int P dx + Q dy = \\ &= (ABDCA) \int P dx + Q dy, \end{aligned}$$

ибо интегрирование по общей части BC , совершенное в противоположных направлениях, *само себя уничтожает*.

Формула (1) доказывает, что *криволинейный интеграл по контуру, ограничивающему область S , сложенный с криволинейным интегралом по контуру, ограничивающему область S^* , равен криволинейному интегралу по контуру, ограничивающему область $S + S^*$* .

При этом нужно еще раз указать, что все эти три интегрирования по трем замкнутым контурам производятся в *положительном* направлении.

Применим это к доказательству достаточности условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

для того чтобы выражение $P dx + Q dy$ было полным дифференциалом.

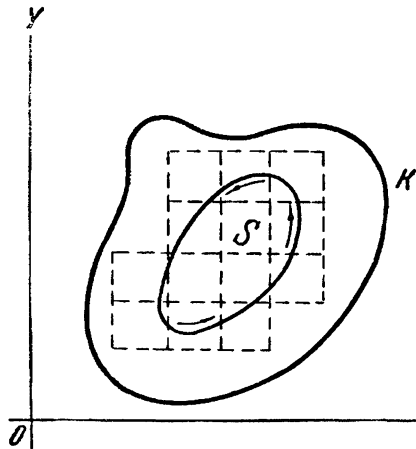


Рис. 158

Пусть K (рис. 158) — какая-нибудь непрерывная замкнутая кривая, не пересекающая саму себя. Пусть внутри K функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе с их частными производными первого порядка и удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1)$$

Надо доказать, что в этих условиях выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал для всей внутренней контура K , т. е. что имеется некоторая функция $F(x, y)$, определенная всюду внутри K

и непрерывная там вместе с ее первыми частными производными, которая удовлетворяет всюду внутри K тождествам

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad (2)$$

т. е. тождеству

$$dF = P dx + Q dy. \quad (3)$$

Мы знаем, что для этого достаточно доказать, что криволинейный интеграл $(\Gamma) \int P dx + Q dy$ по любой непрерывной замкнутой кривой Γ , лежащей целиком внутри K , равен нулю.

Начертим эту кривую Γ . Раз она лежит целиком внутри контура K , то ограниченная ею область S не приближается нигде к нему ближе, чем на расстояние δ , где δ есть некоторое фиксированное положительное число, $\delta > 0$.

Это означает, что всякий прямоугольник, диагональ которого меньше, чем δ , и который содержит точку области S , должен лежать весь внутри контура K .

Разделим плоскость на прямоугольники с диагоналями $< \delta$. Ясно после сказанного, что те из них, которые содержат точки области S , лежат целиком внутри K (рис. 158).

С другой стороны, из леммы мы знаем, что выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал на всяком прямоугольнике π , лежащем внутри K . Это означает, что интеграл $(\gamma) \int Pdx + Qdy$, взятый по какому-нибудь замкнутому контуру γ , не выходящему за периметр прямоугольника π , равен нулю:

$$(\gamma) \int Pdx + Qdy = 0.$$

Отсюда следует, что если мы отберем те прямоугольники, которые содержат точки области S , и возьмем криволинейные интегралы в *положительном направлении* по контурам γ тех кусков области S , которые вырезаются из S каждым из них¹, то все эти криволинейные интегралы суть нули:

$$(\gamma) \int Pdx + Qdy = 0.$$

Значит, и сумма их тоже *есть нуль*. Но, согласно замечанию, сделанному выше, при сложении этих криволинейных интегралов будут взаимно уничтожаться интегралы по общим границам этих кусков области S , как дважды пройденные интегрированием в противоположных направлениях. Следовательно, все дорожки интегрирования, проникающие внутрь области S , т. е. разрезавшие ее на части, сами себя уничтожат, и куски площади S срастутся в одно целое. Неуничтоженными останутся лишь проходимые в положительном направлении дуги контура Γ , ограничивающего целую площадь S . И так

¹ Следует заметить, что мы имеем право предполагать наличие в каждом из отобранных прямоугольников *только одного* куска области S . Это само собой разумеется, когда рассматриваемый прямоугольник не выступает за контур Γ , ибо тогда вся внутренность такого прямоугольника является куском области S . Значит, неясность может возникнуть лишь для прямоугольников Π , частично выступающих за контур Γ . Но в таком случае надо учесть природу контура Γ ; контур этот есть: *или* весь гладкий, *или* составленный из конечного числа гладких дуг. Поэтому его можно разрезать на конечное число столь малых гладких дуг, что изменение наклона касательной к горизонту вдоль каждой из них не будет превышать ε , где ε — любое малое фиксированное число, $\varepsilon > 0$. В этих условиях весь криволинейный контур Γ уподобляется обыкновенному многоугольнику. А для многоугольных контуров Γ деление плоскости XOY на прямоугольники, каждый из которых вырезает из S не более одного куска, является легким, причем *все* прямоугольники Π , частично выступающие за Γ , могут быть сделаны даже *квадратами*.

Это построение сохраняется без изменения для криволинейного контура Π и дает прямоугольники Π с такими же свойствами (см. рис. 158).

как составленная из них сумма является криволинейным интегралом

$$(\Gamma) \int P dx + Q dy,$$

взятым по всей замкнутой кривой Γ в положительном направлении, то этот интеграл *должен быть равным нулю*, что доказывает теорему. ч. т. д.

Как следствие мы получаем:

если непрерывные функции P и Q , имея непрерывные частные производные первого порядка, удовлетворяют внутри контура K соотношению

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тогда выражение $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал, интегрирование которого выполняется криволинейным интегралом

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

в этом случае не зависящим от пути интегрирования и дающим искомую функцию $F(x, y)$, уничтожающуюся в точке $M_0(x_0, y_0)$ и имеющую полный дифференциал dF , равный выражению $P dx + Q dy$.

§ 135. Зависимость криволинейного интеграла от пути. Работа силы. Если условие интегрируемости

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

дифференциального выражения

$$P dx + Q dy \tag{2}$$

не выполнено, тогда, как мы знаем, нельзя требовать, чтобы уравнение в полных дифференциалах:

$$dz = P dx + Q dy \tag{3}$$

определило функцию $z(x, y)$ *двух независимых переменных*, т. е. на куске плоскости. Однако на какой-нибудь кривой L , заранее нами выбранной, дифференциальное уравнение (3) может быть удовлетворено: достаточно для этого написать криволинейный интеграл

$$z = z_0 + (L) \int_{M_0}^M P dx + Q dy,$$

и тогда мы имеем функцию z , определенную вдоль кривой L , принимающую в исходной точке $M_0(x_0, y_0)$ заданное начальное значение z_0 и удовлетворяющую, вдоль кривой L , дифференциальному уравнению (3) (рис. 159).

Однако следует заметить, что величина переменной z , определенной криволинейным интегралом (4), вовсе не есть функция точки $M(x, y)$, при всяких ее координатах x и y ; переменная величина z зависит не только от положения конечной точки M на кривой L , но еще и от самой этой кривой L . Если представить себе, что точка M_0 перемещается по плоскости вдоль кривой L , чтобы, в конце концов, прийти в точку M , то можно сказать, что,

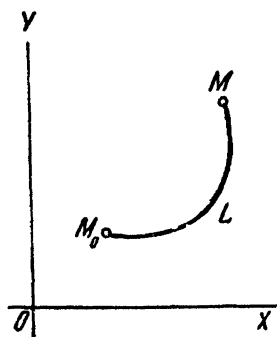


Рис. 159

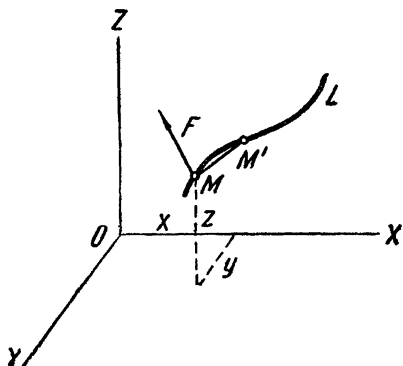


Рис. 160

для того чтобы знать численное значение z , не достаточно знать лишь само положение точки M , но нужно знать еще и ее *историю*, т. е. знать, каковы были ее последовательные положения после того, как она покинула начальное положение M_0 . Можно сказать, что криволинейный интеграл (4) выражает собой явление *наследственности* в том смысле, что если точка M занимала в прошлом последовательные положения на кривой L , то след этого прошлого сказывается в настоящем численном значении переменной z .

Другим истолкованием криволинейного интеграла является важное в механике понятие *работы*.

Если на точку $M(x, y, z)$ действует сила F , имеющая своими компонентами по осям координат X, Y, Z , и если точка M , вычерчивая в пространстве кривую траекторию I , переходит в бесконечно малый промежуток времени из положения M в положение M' , то *элементарной работой силы F называется произведение $F \cdot MM' \cdot \cos(F, MM')$, т. е. $F ds \cos(F, ds)$, ибо хорда MM' и дуга MM' , будучи бесконечно малыми, равносильны друг другу* (рис. 160).

Аналитически, обозначая через dx , dy , dz проекции перемещения MM' на оси координат, элементарная работа имеет своим выражением:

$$Xdx + Ydy + Zdz.$$

Работой силы F вдоль конечной дуги M_0M называется сумма элементарных работ вдоль этой дуги, т. е. пространственный криволинейный интеграл

$$I = (L) \int_{M_0}^M Xdx + Ydy + Zdz,$$

которой можно написать в виде:

$$I = (L) \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz$$

и который взят вдоль дуги L (рис. 161), имеющей начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и концом — точку $M(x, y, z)$.

Пространственный криволинейный интеграл $\int Xdx + Ydy + Zdz$ вычисляется так же, как и плоский криволинейный интеграл

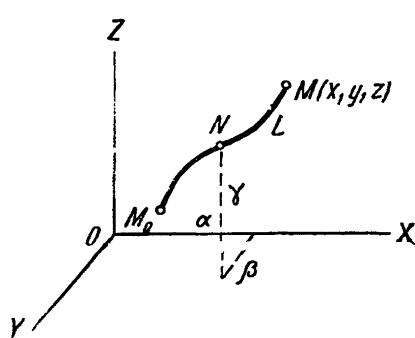


Рис. 161

$\int Pdx + Qdy$. Именно, берут параметрические уравнения пространственной дуги L : $\alpha = \varphi(\tau)$, $\beta = \psi(\tau)$, $\gamma = \omega(\tau)$ (рис. 161) и, делая эту подстановку в криволинейный интеграл I , пишут

$$\begin{aligned} I &= (L) \int_{M_0}^M Xd\alpha + Yd\beta + Zd\gamma = \\ &= \int_{t_0}^t [X\varphi'(\tau) + Y\psi'(\tau) + Z\omega'(\tau)] d\tau, \end{aligned}$$

где предполагается, что при $\tau = t_0$ получаем начальную точку M_0 дуги L , а при $\tau = t$ — ее конец M .

§ 136. Формула Остроградского. М. В. Остроградскому удалось найти точную величину криволинейного интеграла

$$I = (\Gamma) \int Pdx + Qdy$$

по замкнутому контуру Γ в общем случае, когда условие интегрируемости $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ может быть и не соблюдено.

Пусть функции P и Q непрерывны внутри контура K , как и их первые производные. Пусть Γ какая-нибудь замкнутая, не пересекающая саму себя кривая, лежащая целиком внутри K . Мы обозначим через S часть плоскости, ограниченную кривой Γ .

Разобьем плоскость XOY на прямоугольники, имеющие стороны параллельными осям координат и диагонали меньшими, чем фиксированное число δ , $\delta > 0$. Из этих прямоугольников мы удерживаем только те, которые содержат точки области S . Если мы возьмем

криволинейные интегралы $(\gamma) \int P dx +$

$+ Q dy$ в положительном направлении по контурам (γ) тех кусков области S , которые вырезаются из S каждым удержанным прямоугольником и, затем, сложим все эти интегралы, то, согласно § 134, их сумма будет в точности равна криволинейному интегралу от выражения $P dx + Q dy$ по всему контуру Γ в положительном направлении. Следовательно, мы имеем:

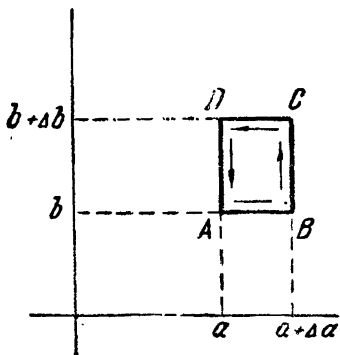


Рис. 162

$$\sum (\gamma) \int P dx + Q dy = (\Gamma) \int P dx + Q dy. \quad (1)$$

Мы должны теперь оценить слагаемые левой части.

Случай первый: рассматриваемый прямоугольник не выходит за контур Γ . Пусть $ABCD$ такой прямоугольник (рис. 162). Имеем:

$$\begin{aligned} I_{ABCD} &= \int P dx + Q dy = \int_0^{\Delta a} P(a+t, b) dt + \\ &+ \int_0^{\Delta b} Q(a+\Delta a, b+t) dt - \int_0^{\Delta a} P(a+t, b+\Delta b) dt - \int_0^{\Delta b} Q(a, b+t) dt = \\ &= - \int_0^{\Delta a} [P(a+t, b+\Delta b) - P(a+t, b)] dt + \\ &+ \int_0^{\Delta b} [Q(a+\Delta a, b+t) - Q(a, b+t)] dt. \end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем Лагранжа, находим:

$$I = -\Delta b \cdot \int_0^{\Delta a} P'_y(a+t, b+\theta_1 \Delta b) dt + \Delta a \cdot \int_0^{\Delta b} Q'_x(a+\theta_2 \Delta a, b+t) dt,$$

где θ_1 и θ_2 положительны и оба < 1 .

Так как P'_y и Q'_x суть непрерывные функции, то, применяя теперь теорему о среднем для определенного интеграла (см. § 35), мы находим:

$$\begin{aligned} I &= -\Delta b \cdot \Delta a \cdot P'_y(a+\theta_3 \Delta a, b+\theta_1 \Delta b) + \\ &\quad + \Delta a \cdot \Delta b \cdot Q'_x(a+\theta_2 \Delta a, b+\theta_4 \Delta b) = \\ &= [Q'_x(a+\theta_2 \Delta a, b+\theta_4 \Delta b) - P'_y(a+\theta_3 \Delta a, b+\theta_1 \Delta b)] \cdot \Delta a \Delta b. \end{aligned}$$

Мы замечаем, что уменьшаемое и вычитаемое, написанные в квадратной скобке, являются ничем иным, как численными значениями производных $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в некоторых двух точках, лежащих внутри рассматриваемого прямоугольника $ABCD$.

Поэтому, если мы берем все такие прямоугольники $ABCD$ и, составив сумму соответствующих им криволинейных интегралов $(ABCD) \int P dx + Q dy$, заставим положительное ε безгранично приближаться к нулю, то, в силу самого определения двойного интеграла (§ 119), мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum (ABCD) \int P dx + Q dy &= \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Случай второй: рассматриваемый прямоугольник частично выступает за контур Γ . Как мы знаем из § 134 (см. примечание в сноске), такой прямоугольник π всегда можно предполагать: либо квадратом, либо составленным из двух равновеликих квадратов путем склеивания вдоль общей им стороны, причем дуга контура Γ , пересекая его, соединяет точки A и B двух противоположных сторон

(рис. 163). Отсюда сразу следует, что длина контура γ куска области S , вырезанного из S прямоугольником π , не может превышать шести длин дуги AB контура Γ . Поэтому общая длина всех контуров γ кусков области S , вырезаемых прямоугольниками π , не превышает $6L$, где L — длина всего контура Γ .

Найдя это, рассмотрим интеграл $(\gamma) \int P dx + Q dy$, взятый в положительном направлении по контуру γ . Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка дуги AB (рис. 163). Обозначив через P_0 и Q_0 численные значения функций P и Q в точке M_0 , мы имеем:

$$\begin{aligned} & (\gamma) \int P dx + Q dy = \\ & = (\gamma) \int P_0 dx + Q_0 dy + \\ & + (\gamma) \int (P - P_0) dx + (Q - Q_0) dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Но первый интеграл в правой части равенства (3), очевидно, равен нулю, ибо контур γ есть *замкнутый*, а подынтегральное выражение $P_0 dx + Q_0 dy$ есть *полный дифференциал*. Второй же интеграл в правой части очень мал, ибо диагональ всякого прямоугольника π меньше чем δ , где δ — сколь угодно малое фиксированное число. Отсюда следует, что имеем неравенство

$$|P - P_0| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |Q - Q_0| < \varepsilon$$

на всем прямоугольнике π , где $\varepsilon > 0$ есть фиксированное сколь угодно малое число.

Поэтому мы видим, что абсолютная величина этого интеграла не может быть больше, чем:

$$(\gamma) \int \varepsilon |dx| + \varepsilon |dy| < (\gamma) \int \varepsilon \cdot ds + \varepsilon \cdot ds = 2\varepsilon \cdot (\gamma) \int ds,$$

где ds есть дифференциал дуги контура γ .

Следовательно, сумма $\sum (\gamma) \int P dx + Q dy$ всех криволинейных интегралов по контурам γ , соответствующим прямоугольникам π , не может превысить

$$2\varepsilon \sum (\gamma) \int ds < \varepsilon \cdot 12 \cdot L$$

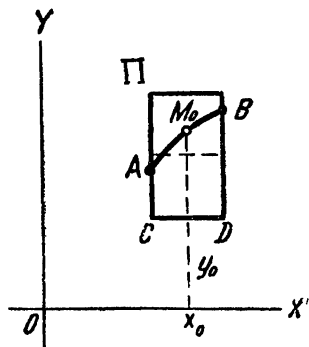


Рис. 163

(согласно сказанному вначале), где L — длина всего контура Γ . И так как ε сколь угодно мало, то мы видим, что

$$\lim \sum (\gamma) \int P dx + Q dy = 0, \quad (4)$$

где знак суммы распространяется на *все* прямоугольники π , частично выступающие из Γ .

Окончательно сопоставляя равенства (1), (2) и (4), мы видим, что

$$(\Gamma) \int P dx + Q dy = \iint_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5)$$

А это и есть *формула Остроградского*.

ч. т. д.

Следствие. Из формулы (5) Остроградского сразу следует уже известное нам предложение: *для того, чтобы интеграл $(\Gamma) \int P dx + Q dy$ по любой замкнутой кривой Γ , лежащей внутри контура K , был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы имело место всюду внутри K равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Достаточность ясна из того, что при соблюдении этого равенства подынтегральное выражение двойного интеграла обращается в нуль.

Необходимость ясна из того, что если в какой-нибудь точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей внутри K , разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ будет отличной от нуля, например положительной, то тогда, в силу предполагающейся непрерывности первых частных производных от функций P и Q , мы будем иметь неравенство $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$ вблизи точки M_0 . А тогда, беря окружность Γ достаточно малого радиуса ρ , имеющую центром точку M_0 , мы внутри Γ будем иметь двойной интеграл (5) положительным и, значит, невозможно, в силу формулы Остроградского, чтобы криволинейный интеграл, стоящий в ней налево, был нулем.

§ 137. Дифференциальное уравнение, левая часть которого есть полный дифференциал. Мы знаем, что всякое дифференциальное уравнение первого порядка может быть написано в виде

$$P dx + Q dy = 0, \quad (1)$$

где P и Q суть функции от двух независимых переменных x и y .

Если выражение $P dx + Q dy$ есть *полный дифференциал*, т. е. если имеется некоторая функция $F(x, y)$ двух независимых переменных x и y такая, что

$$dF = P dx + Q dy, \quad (2)$$

то данное дифференциальное уравнение (1) указывает, что вдоль всякого его решения $y(x)$ мы имеем $dF = 0$ и, следовательно, что вдоль решения $y(x)$ функция $F(x, y)$ сохраняет постоянную величину.

Это означает, что самое решение $y(x)$ *дифференциального* уравнения (1) получается теперь из *конечного* уравнения

$$F(x, y) = C, \quad (3)$$

где C есть постоянная величина.

Полагая C *произвольным постоянным*, мы получаем все решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1) и, значит, (3) является *общим решением*.

Из предыдущего мы знаем:

1) что для того, чтобы левая часть дифференциального уравнения (1) была полным дифференциалом, необходимо и достаточно наличие тождества $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$;

2) что при наличии этого тождества нужная нам функция $F(x, y)$ получается одним криволинейным интегралом

$$L \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$$

по какому-нибудь пути L , идущему от начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ к точке $M(x, y)$, причем результат внутри контура K от пути интегрирования L не зависит. Можно также получить $F(x, y)$, выполняя, согласно § 134, две квадратуры:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(\alpha, y_0) d\alpha + \int_{y_0}^y Q(x, \beta) d\beta + C.$$

§ 138. Интегрирующий множитель. Если выражение $P dx + Q dy$ не есть полный дифференциал, то тогда естественно искать такой множитель $\mu(x, y)$, чтобы новое выражение $\mu P dx + \mu Q dy$, полученное из старого умножением на μ , стало полным дифференциалом.

Полезно отыскания этого множителя μ , называющегося *интегрирующим множителем*, та, что старое и новое дифференциальные уравнения:

$$P dx + Q dy = 0 \quad \text{и} \quad \mu P dx + \mu Q dy = 0$$

являются, собственно, *одним и тем же уравнением*, но интегрирование нового уравнения, как вообще интегрирование всякого полного дифференциала, требует только двух квадратур.

Для того, чтобы новое уравнение

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 \quad (1)$$

было точным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы имели место тождества

$$\frac{\partial (\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial (\mu P)}{\partial y}$$

или

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}. \quad (2)$$

Следовательно, *интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ служит решением уравнения в частных производных (2) и, наоборот, всякое решение $\mu(x, y)$ уравнения в частных производных (2) является интегрирующим множителем для выражения $P dx + Q dy$.*

Доказывается в более полных учебниках, что уравнение (2) *всегда* имеет решения и, значит, всегда имеются интегрирующие множители $\mu(x, y)$ для всякого выражения $P dx + Q dy$.

Большинство дифференциальных уравнений

$$P dx + Q dy = 0, \quad (3)$$

интегрирование которых выполняется до конца квадратурами, таковы, что *нам известны их интегрирующие множители μ .*

Пример 1. Однородное уравнение $P dx + Q dy = 0$, где P и Q суть *однородные функции* той же самой степени m от x и y , имеет дробь $\frac{1}{P x + Q y}$ своим интегрирующим множителем.

Доказательство. Укажем сначала характеристическое свойство однородных функций. Если $f(x, y)$ есть однородная функция от двух аргументов x и y , причем ее степень однородности равна m , то это означает, что при умножении обоих аргументов x и y на произвольное число t наша функция $f(x, y)$ воспроизводится, приобретая лишь множитель t^m .

Например, функция $2x^3 + 5xy^2 - 7x^2y$ есть однородная степени 3, ибо умножение ее аргументов x и y на t дает: $2(xt)^3 + 5(xt) \cdot (yt)^2 - 7(xt)^2 (yt) = t^3 \cdot (2x^3 + 5xy^2 - 7x^2y)$.

Таким образом, если $f(x, y)$ есть однородная функция степени m , то это означает, что имеем тождество по трем буквам x, y и t

$$f(xt, yt) = t^m \cdot f(x, y). \quad (4)$$

Дифференцируя это тождество по букве t , имеем:

$$xf'_x(xt, yt) + yf'_y(xt, yt) = mt^{m-1}f(x, y).$$

Полагая $t = 1$, получаем тождество по аргументам x и y

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = mf(x, y).$$

Проверим теперь, будет ли множитель $\frac{1}{Px + Qy}$ интегрирующим для выражения $Pdx + Qdy$.
Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q}{Px + Qy} &= \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot (Px + Qy) - PQ - Q \left(x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial x} \right)}{(Px + Qy)^2} = \\ &= \frac{x \left(P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) - PQ}{(Px + Qy)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{P}{Px + Qy} = \frac{y \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial y} \right) - PQ}{(Px + Qy)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q}{Px + Qy} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{P}{Px + Qy} = \frac{P \left(x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} \right) - Q \left(x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} \right)}{(Px + Qy)^2}.$$

Но, в силу однородности функции Q , первая скобка равна mQ ; а в силу однородности функции P вторая скобка равна mP , где m — степень однородности. Значит, предыдущее выражение равно $\frac{mPQ - mQP}{(Px + Qy)^2} = 0$. Значит,

$\frac{1}{Px + Qy}$ есть интегрирующий множитель.

Пример 2. Найти интегрирующий множитель линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q суть функции одного переменного x .

Решение. Переписываем данное линейное уравнение в виде $dy + (Py - Q)dx = 0$. Если μ — интегрирующий множитель, мы должны иметь

$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} (Py - Q) + \mu P$. Этому уравнению удовлетворяем, ища интегрирующий множитель μ , зависящий только от x . Тогда имеем $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и предыдущее уравнение напишется в виде $\frac{d\mu}{dx} = \mu P$, т. е. $\frac{d\mu}{\mu} = P dx$, откуда

$$\ln \mu = \int P dx \text{ и } \mu = e^{\int P dx}.$$

Интегрируя полный дифференциал

$$e^{\int P dx} dy + e^{\int P dx} (Py - Q) dx$$

по правилу, указанному в § 137, мы находим:

$$ye^{\int P dx} - \int Qe^{\int P dx} dx = C,$$

откуда имеем полученное прежде общее решение

$$y = e^{-\int P dx} \left(\int Qe^{\int P dx} dx + C \right).$$

ГЛАВА XI

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 139. Тригонометрические ряды. *Тригонометрическим рядом* называется всякий ряд, имеющий вид:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (1)$$

где постоянные числа a_0, a_1, a_2, \dots и b_1, b_2, \dots называются *коэффициентами тригонометрического ряда*. Они предполагаются действительными, так же как и переменное x .

Если тригонометрический ряд (1) сходится для всякого действительного x , тогда его сумма зависит от x ; ее обозначают через $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (2)$$

и в этом случае говорят, что *функция $f(x)$ разложена в тригонометрический ряд*. Очевидно, что $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π .

Для многих чисто практических целей науки и техники нужно уметь разлагать **заранее заданную** периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π в тригонометрический ряд. Для этого надо уметь делать две вещи:

во-первых, *надо уметь по заданной функции $f(x)$ отыскивать коэффициенты того тригонометрического ряда, в который должна разложиться заданная функция $f(x)$* ;

во-вторых, *надо уметь доказать, что найденный таким образом тригонометрический ряд в самом деле есть ряд сходящийся и притом имеет своей суммой как раз ту самую функцию $f(x)$, которая нам была задана и которую мы хотели разложить в тригонометрический ряд*.

§ 140. Формулы Фурье. Первая задача очень простая. Прежде всего тригонометрический ряд (1) надо рассматривать не на всей оси OX , а только на каком-нибудь отрезке длины 2π . Ибо, если мы к численному значению x прибавим (или вычтем) 2π , то

все члены ряда нисколько не изменятся, так как все они периодические и имеют периодом 2π . В самом деле, мы имеем тождество:

$$a_n \cos n(x \pm 2\pi) + b_n \sin n(x \pm 2\pi) = a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1)$$

Поэтому тригонометрические ряды рассматривают обычно только на отрезках: или $[0, 2\pi]$, или $[-\pi, +\pi]$, ибо за пределами этих отрезков рассматривать эти ряды излишне.

Для того, чтобы найти те формулы, по которым должны вычисляться коэффициенты a_n, b_n тригонометрического ряда для заданной заранее его суммы $f(x)$, мы сначала возьмем такой тригонометрический ряд, который должен заведомо сходиться и, значит, должен иметь определенную сумму $f(x)$: таковы абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды, у которых ряд абсолютных

величин их коэффициентов $\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ есть ряд сходящийся.

Если этот последний ряд сходится, тогда ясно, что и тригонометрический ряд (1) также будет сходящимся и притом правильно сходящимся (см. § 78) на отрезке $[0, 2\pi]$, ибо его общий член $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ удовлетворяет неравенству

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Ясно, что такой тригонометрический ряд (2) есть равномерно сходящийся (см. § 78) на отрезке $[0, 2\pi]$ и, значит, его сумма $f(x)$ есть непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ функция.

Для того, чтобы отыскать коэффициенты a_0, \dots, a_n, b_n рассматриваемого тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (2)$$

по его сумме $f(x)$, примем сначала во внимание следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= 0, \quad \text{если } m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0, \quad \text{даже если } m = n, \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 0, \quad \text{если } m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} dx = 2\pi. \end{aligned}$$

Если мы теперь умножим обе части разложения (2), в котором предварительно заменим x через a на $\cos m\alpha d\alpha$ и интегрируем¹ между пределами 0 и 2π , то найдем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha. \quad (3)$$

Точно так же, умножая на $\sin n\alpha d\alpha$ и интегрируя, получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (4)$$

Наконец, для $n=0$, имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha \quad (3^*)$$

и, таким образом, формула (3*) является частным случаем общей формулы (3), в которой надо только положить $n=0$.

Формулы (3) и (4) обычно пишут вместе:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \end{aligned} \right\} n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

и называют *формулами Фурье*. Сообразно с этим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots, \quad (1)$$

коэффициенты которого a_0 , a_n , b_n определяются по формулам Фурье (5), называется *рядом Фурье для функции $f(x)$* , причем обыкновенно пишут символически

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots, \quad (6)$$

показывая этим, что функция $f(x)$ образовала стоящий направо от знака \sim тригонометрический ряд по формулам Фурье (5), дающим его коэффициенты.

Вместо символического знака \sim писать обыкновенное равенство $=$ нельзя, ибо имеются даже непрерывные функции $f(x)$, для

¹ Это почленное интегрирование законно, ибо рассматриваемый ряд (2) равномерно сходится. См. об этом § 79.

которых их ряды Фурье расходятся (по крайней мере в некоторых точках). Но когда коэффициенты a_0 , a_n , b_n дают абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$, тогда вместо знака \sim заведомо можно писать обыкновенный знак равенства $=$. В других же случаях этого делать *без предварительного исследования* нельзя, ибо еще неизвестно, будет ли ряд Фурье, образованный для заданной функции $f(x)$, сходиться именно к ней, а не к какой-нибудь посторонней функции $\Phi(x)$, если он, вообще, окажется сходящимся рядом.

§ 141. Предварительные леммы. Для того, чтобы исследовать ряды Фурье и доказать, что они сходятся к образующим их функциям $f(x)$, по крайней мере для некоторых видов функций $f(x)$, необходимо дать некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на каком-нибудь отрезке $[a, b]$, тогда оба определенных интеграла $\int_a^b f(x) \cos nx \, dx$ и $\int_a^b f(x) \sin nx \, dx$ стремятся к нулю, когда n безгранично возрастает.

Доказательство. Рассмотрим только первый интеграл, так как доказательство для второго интеграла такое же.

Обозначим же первый интеграл через A_n

$$A_n = \int_a^b f(x) \cos nx \, dx. \quad (1)$$

Так как для любого φ имеем $-\cos(\varphi - \pi) = \cos \varphi$, то $\cos nx = -\cos(n\alpha - \pi)$. Поэтому

$$A_n = - \int_a^b f(\alpha) \cos(n\alpha - \pi) \, d\alpha = - \int_a^b f(\alpha) \cos n \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) d\alpha.$$

Обозначив $\alpha - \frac{\pi}{n} = \beta$, мы имеем: $\alpha = \beta + \frac{\pi}{n}$ и $d\alpha = d\beta$. Отсюда

$$\begin{aligned} A_n &= - \int_{a - \frac{\pi}{n}}^{b - \frac{\pi}{n}} f \left(\beta + \frac{\pi}{n} \right) \cos n\beta \, d\beta = \\ &= - \int_{a - \frac{\pi}{n}}^{b - \frac{\pi}{n}} f \left(\alpha + \frac{\pi}{n} \right) \cos n\alpha \, d\alpha, \end{aligned}$$

ибо переменное интегрирования β мы можем написать снова в виде буквы α .

Итак, одновременно с равенством (1) имеем:

$$A_n = - \int_{a - \frac{\pi}{n}}^{b - \frac{\pi}{n}} f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \cos n\alpha \, d\alpha. \quad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), находим:

$$\begin{aligned} 2A_n = & - \int_{a - \frac{\pi}{n}}^a f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \cos n\alpha \, d\alpha + \\ & + \int_a^{b - \frac{\pi}{n}} \left[f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right] \cdot \cos n\alpha \, d\alpha + \int_{b - \frac{\pi}{n}}^b f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на нем *ограничена*, т. е. имеем неравенство $|f(x)| \leq M$ для всех точек x отрезка $[a, b]$. Поэтому оба крайние интеграла, стоящие в правой части равенства (3), не превышают каждый, по абсолютной величине, количества $M \cdot \frac{\pi}{n}$. Что же касается среднего интеграла, то его абсолютная величина не превышает

$$\int_a^{b - \frac{\pi}{n}} \left| f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right| d\alpha.$$

Значит имеем неравенство

$$|2A_n| \leq 2M \cdot \frac{\pi}{n} + \int_a^{b - \frac{\pi}{n}} \left| f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right| d\alpha.$$

В силу того, что функция $f(x)$ есть *равномерно непрерывная* на $[a, b]$, мы имеем для достаточно большого числа n неравенство $\left| f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) \right| < \varepsilon$, где ε — фиксированное *произвольно малое* положительное число. Таким образом, для n достаточно большого имеем:

$$|2A_n| < 2M \frac{\pi}{n} + \varepsilon(b - a), \quad (4)$$

и так как $2M \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$, то отсюда заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0.$$

Аналогично доказываем, что второй интеграл B_n доказываемой леммы

$$B_n = \int_a^b f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$$

также стремится к нулю, когда n безгранично возрастает, т. е. имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = 0. \quad \text{ч. т. д.}$$

Доказанная лемма 1 имеет такие следствия.

Следствие 1. Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ состоит из конечного числа непрерывных дуг, тогда оба интеграла $\int_a^b f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$ и $\int_a^b f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$ по-прежнему стремятся к нулю, когда n безгранично возрастает.

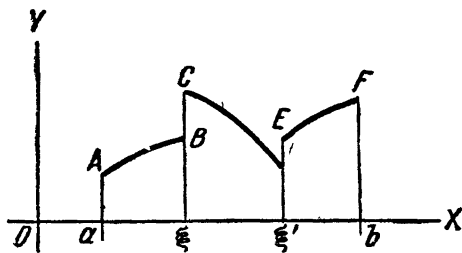


Рис. 164

В самом деле, в этом случае интеграл $\int_a^b f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$ разби-

вается на сумму конечного числа частных интегралов $\int_a^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi'} + \int_{\xi'}^b$ (рис. 164), каждый из которых имеет функцию $f(x)$ непрерывной между пределами интегрирования, включая сюда эти самые пределы. Поэтому, по доказанной лемме 1, каждый из этих част-

ных интегралов стремится к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, и сумма их, т. е. весь интеграл $\int_a^b f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Аналогично имеем $\int_a^b f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Следствие 2. Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ состоит из конечного числа непрерывных дуг, то коэффициенты ряда Фурье a_n и b_n для функции $f(x)$ стремятся к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$, т. е. имеем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

В самом деле, согласно формулам Фурье (5) § 140, мы имеем $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha$ и $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha$. Значит, согласно лемме 1, имеем $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Лемма 2. Для всякого натурального числа n имеем тождество

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (5)$$

Доказательство. Имеем очевидное тождество:

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha = 2 \cdot \cos k\alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

для $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Переписав это тождество в виде:

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(\overline{k-1} + \frac{1}{2}\right)\alpha = 2 \cos k\alpha \sin \frac{\alpha}{2}$$

и суммируя для $k = 1, 2, 3, \dots, n$, мы находим:

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin \frac{\alpha}{2} = (\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha) \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда, перенося $\sin \frac{\alpha}{2}$ в правую часть и деля все на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$, получаем тождество (5). ч. т. д.

§ 142. Выражение суммы $n+1$ первых членов ряда Фурье. Пусть функция $f(x)$ изображается на отрезке $[0, 2\pi]$ конечным числом непрерывных дуг (рис. 165).

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

есть ряд Фурье для $f(x)$. Это означает, что коэффициенты a_n, b_n вычисляются по формуле Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \quad (2)$$

Обозначив через $S_n(x)$ сумму первых $n+1$ членов ряда Фурье, мы имеем:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3)$$

или сокращенно:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (4)$$

Общий член $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ этой конечной суммы $S_n(x)$, по внесении в него выражения коэффициентов a_k и b_k по формулам Фурье, примет вид:

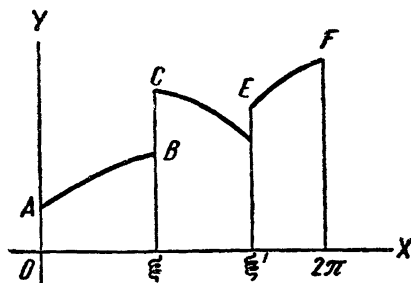


Рис. 165

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) [\cos k\alpha \cos kx + \\ &\quad + \sin k\alpha \sin kx] \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \cos k(\alpha - x) \cdot d\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому вся сумма $S_n(x)$ напишется в виде:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\alpha - x) \right] \cdot d\alpha. \quad (6)$$

Выражение, написанное под знаком интеграла в квадратных скобках, при фиксированном x , есть периодическая функция от α с периодом 2π . Что же касается функции $f(\alpha)$, то она определена пока *только* на основном отрезке $[0, 2\pi]$. Но мы можем определить ее вдоль всей оси OX , сделав ее также периодической с периодом 2π ; для этого достаточно сначала разделить всю ось OX на отрезки длины 2π , откладывая последовательно такой отрезок вправо и влево от начала координат O , и затем в каждом из этих отрезков повторить тот самый график, который нам дан на основ-

ном отрезке $[0, 2\pi]$ (см. рис. 165). Когда это мы выполним, функция $f(\alpha)$ явится определенной на всей оси OX и имеющей периодом 2π . После этого произведение $f(\alpha) \cdot [\]$, стоящее под знаком интеграла (6), будет определенным вдоль всей оси OX и периодическим, с периодом 2π . А так как интеграл от периодической функции, взятый на отрезке длины, равной периоду, есть, очевидно, величина *постоянная*, не зависящая от положения этого отрезка, то мы имеем право в формуле (6) заменить отрезок $[0, 2\pi]$, по которому берется интеграл, отрезком $[x - \pi, x + \pi]$, также имеющим длину 2π . Это нам дает:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\alpha - x) \right] d\alpha.$$

Сделав подстановку $\alpha - x = \beta$, мы имеем: $\alpha = x + \beta$ и $d\alpha = d\beta$. Отсюда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + \beta) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\beta \right] d\beta.$$

Написав переменное интегрирования β снова в виде α и вспоминая лемму 2 предыдущего параграфа, мы находим окончательно:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + \alpha) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha. \quad (7)$$

Этот интеграл, выражающий сумму $n + 1$ первых членов ряда Фурье для заданной нам функции $f(x)$, называется *интегралом Дирихле*. Его назначение — сделать возможным исследование сходимости рядов Фурье, для чего нужно заставить число n безгранично увеличиваться. Имея в виду эту цель, можно *несколько уменьшить трудность исследования интеграла Дирихле, заменив его жесткие пределы интегрирования $-\pi$ и $+\pi$ более гибкими пределами $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$* .

Чтобы доказать законность такого упрощения интеграла Дирихле (7), заметим, что функция $f(x)$ предполагается изображаемой на основном отрезке $[0, 2\pi]$ *конечным числом непрерывных дуг*. Так как знаменатель $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ не уничтожается на отрезках $[-\pi, -\varepsilon]$ и $[+\varepsilon, +\pi]$, где $\varepsilon > 0$ и весьма мало, то оба выражения:

$$f(x + \alpha) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad f(x + \alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

на отрезках $[-\pi, -\epsilon]$ и $[+\epsilon, +\pi]$ *изобразимы*, каждое *конечным числом непрерывных дуг*.

Поэтому, в силу следствия 1 леммы 1 (см. предыдущий §), мы имеем все четыре интеграла

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\epsilon} f(x+\alpha) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin n\alpha \, d\alpha,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\epsilon} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos n\alpha \, d\alpha,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \int_{+\epsilon}^{+\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin n\alpha \, d\alpha,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \int_{+\epsilon}^{+\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos n\alpha \, d\alpha,$$

стремящимися к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$.

А так как мы имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\epsilon} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha = I_1 + I_2$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int_{+\epsilon}^{+\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha = I_3 + I_4,$$

то оба эти интеграла $\rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Отсюда следует, что *сумму $S_n(x)$ первых $n+1$ членов ряда Фурье для $f(x)$ можно написать в виде:*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha + \eta_n, \quad (8)$$

где η_n есть величина бесконечно малая, когда $n \rightarrow \infty$.

Интеграл, стоящий в правой части равенства (8), называется *усеченным интегралом Дирихле*. В нем число ϵ , стоящее в пределах интегрирования, есть число положительное, малое как угодно, но *заранее заданное* (т. е. фиксированное).

§ 143. Сходимость ряда Фурье. Мы ограничиваемся практически важным случаем, когда *разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ изображена конечным числом отдельных непрерывных дуг, имеющих в каждой их точке касательную прямую.*

Здесь, для наиболее ясного понимания, мы делаем то указание, что каждая из этих отдельных дуг, каковыми на рисунке 165 являются дуги AB , CD и EF , во всякой своей точке имеет определенную касательную прямую, даже в их концевых точках A и B , C и D , E и F .

Если x есть точка непрерывности функции $f(x)$ на каждой из этих дуг, тогда x не может быть абсциссой ни одной концевой точки и тогда функция $f(x)$ имеет в такой точке производную $f'(x)$, т. е. отношение

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$$

стремится к определенному пределу, когда $\alpha \rightarrow 0$, имея *любой знак: $\alpha > 0$ или $\alpha < 0$.*

Если же точка ξ есть концевая точка какой-нибудь дуги, то тогда ξ есть абсцисса *двух* концевых точек, например, точек B и C (см. рис. 165). Ясно, что в этом случае $f(\xi-0) =$ отрезку ξB , а $f(\xi+0) =$ отрезку ξC , вообще отличному от отрезка ξB . Поэтому в такой точке ξ функция $f(x)$ не может иметь производной, но зато должны иметься два предела:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi+0)}{\alpha}, \quad \text{где } \alpha > 0 \quad (1)$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\xi+\alpha)-f(\xi-0)}{\alpha}, \quad \text{где } \alpha < 0. \quad (2)$$

Ясно, что *первый предел (1) равен тангенсу наклона касательной прямой к дуге CD в точке C , а второй предел (2) равен тангенсу наклона касательной прямой к дуге AB в точке B .*

Заметив это, возьмем ряд Фурье для рассматриваемой функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (3)$$

Сумма $S_n(x)$ его первых $n+1$ членов напишется в виде

$$S_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha + \eta_n, \quad (4)$$

где $\eta_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Случай первый. *Сходимость ряда Фурье во внутренней точке x дуги.*

По лемме 2, § 141, имеем:

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Умножив на $\frac{1}{\pi} d\alpha$ и интегрируя между пределами 0 и $+\pi$, имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Аналогично имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Каждый из интегралов (5) и (6) можно разбить на две части:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^0,$$

из которых вторые части стремятся к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$ (см. § 142). Следовательно, имеем:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha + \eta_n^* \quad (5^*)$$

и

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\varepsilon} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha + \eta_n^{**}, \quad (6^*)$$

где $\eta_n^* \rightarrow 0$ и $\eta_n^{**} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Складывая (5*) и (6*), мы находим:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha + \eta_n^* + \eta_n^{**}. \quad (7)$$

Умножив равенство (7) на постоянное $f(x)$, мы получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x) \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha + (\eta_n^* + \eta_n^{**}) \cdot f(x). \quad (8)$$

Вычитая равенство (8) из равенства (4), мы получаем:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \cdot d\alpha + \\ + \eta_n - (\eta_n^* + \eta_n^{**}) \cdot f(x). \quad (9)$$

Полученное равенство (9) чрезвычайно важно, ибо из него прямо следует сходимость ряда Фурье к функции $f(x)$ во всякой ее точке непрерывности x .

В самом деле, первая дробь $\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$, стоящая под интегралом, есть непрерывная функция аргумента α в точке $\alpha = 0$, ибо эта дробь стремится к определенному пределу $f'(x)$, когда $\alpha \rightarrow 0$ по любому закону и будучи любого знака. Но эта дробь также непрерывна и во всякой другой точке α отрезка $[-\varepsilon \leq \alpha \leq +\varepsilon]$, ибо разрыв мог бы случиться только по причине разрыва уменьшаемого $f(x+\alpha)$. А чтобы этого не произошло, мы можем взять число ε меньше расстояния точки непрерывности x до ближайшей концевой точки дуги. В этих условиях ясно, что $f(x+\alpha)$ будет непрерывной функцией на всем отрезке $[-\varepsilon \leq \alpha \leq +\varepsilon]$.

Вторая дробь $\frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ есть непрерывная функция на отрезке $[-\varepsilon \leq \alpha \leq +\varepsilon]$, ибо она стремится к 1, когда $\alpha \rightarrow 0$ по любому закону, и непрерывна в других точках отрезка $[-\varepsilon \leq \alpha \leq +\varepsilon]$.

Поэтому к интегралу (9) применима лемма 1 § 141, и, следовательно, вся правая часть равенства (9) стремится к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$.

Таким образом, имеем равенство:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x), \quad (10)$$

выражающее *сходимость ряда Фурье к $f(x)$ во всякой внутренней точке x дуги*.

Случай второй. *Сходимость ряда Фурье в конце ξ дуги.*

В этом случае, усеченный интеграл Дирихле (4) разбиваем на две половины:

$$S_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\varepsilon} f(\xi + \alpha) \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^0 f(\xi + \alpha) \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha + \eta_n = I'_n + I''_n + \eta_n. \quad (11)$$

где мы через I'_n обозначим первый интеграл, а через I''_n — второй.

Вычислим предел первого интеграла I'_n , когда $n \rightarrow +\infty$. Для этого умножим равенство (6*) на $f(\xi+0)$ и вычтем из I'_n . Имеем:

$$I'_n - \frac{f(\xi+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\varepsilon} \frac{f(\xi+\alpha) - f(\xi+0)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \times \\ \times \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \cdot d\alpha - \eta_n^{**} f(\xi+0). \quad (12)$$

По-прежнему заключаем, что первая дробь $\frac{f(\xi+\alpha) - f(\xi+0)}{\alpha}$ есть *непрерывная* функция аргумента α на отрезке $[0 \leq \alpha \leq +\varepsilon]$, ибо, во-первых, она непрерывна справа в точке $\alpha=0$ и ее предел в этой точке равен тангенсу наклона касательной в конце C дуги CD , и, во-вторых, она непрерывна во всякой другой точке α отрезка $[0 \leq \alpha \leq +\varepsilon]$, когда число ε взято меньшим расстояния от точки разрыва ξ до ближайшей из других конечных точек.

Поэтому интеграл, стоящий в правой части равенства (12), в силу леммы 1 § 141, стремится к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I'_n = \frac{f(\xi+0)}{2}. \quad (13)$$

Совершенно так же вычисляется предел второй половины I''_n интеграла Дирихле (11): умножая равенство (5*) на $f(\xi-0)$ и вычитая из I''_n , находим:

$$I''_n - \frac{f(\xi-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^0 \frac{f(\xi+\alpha) - f(\xi-0)}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \times \\ \times \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \cdot d\alpha - \eta_n^* (\xi-0). \quad (14)$$

Так как первая дробь $\frac{f(\xi+\alpha) - f(\xi-0)}{\alpha}$ непрерывна на отрезке $[-\varepsilon \leq \alpha \leq 0]$, то, в силу леммы 1 § 141, интеграл, стоящий в первой части равенства (14), стремится к нулю, когда $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I''_n = \frac{f(\xi-0)}{2}. \quad (15)$$

Принимая во внимание то, что в равенстве (11) $\eta_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow +\infty$, мы на основании формул (13) и (15) получаем окончательно:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\xi) = \frac{f(\xi+0) + f(\xi-0)}{2}. \quad (16)$$

Таким образом, мы пришли к следующему важному предложению:
Основная теорема. Если функция $f(x)$ изображима на отрезке длиной 2π конечным числом отдельных непрерывных дуг, имею-

щих во всякой точке касательную прямую, тогда ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится в каждой точке: если x есть точка непрерывности функции $f(x)$, сумма рассматриваемого ряда Фурье равна $f(x)$; если ξ есть точка разрыва функции $f(x)$, сумма этого ряда равна среднему арифметическому $\frac{f(\xi+0) + f(\xi-0)}{2}$ пределов справа и слева в точке ξ .

Пример 1. Показать, что тригонометрический ряд

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots$$

всюду сходится и имеет сумму $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ внутри отрезка $[0, 2\pi]$, сходясь к нулю в его концах.

Решение. Разлагая в ряд Фурье указанную функцию, имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \cos nx \, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n}.$$

Поэтому ряд Фурье имеет написанный вид и обязан сходиться к $\frac{1}{2}(\pi - x)$ внутри $[0, 2\pi]$. В его концах находятся точки разрыва разлагаемой функции, ибо она должна быть периодической с периодом 2π . Поэтому сумма ряда Фурье в концах отрезка $[0, 2\pi]$ должна быть полусуммой значений слева и справа, т. е. должна быть равна нулю (рис. 166).

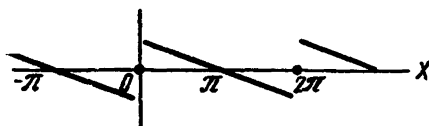


Рис. 166

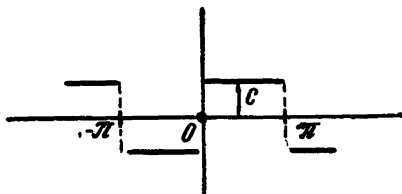


Рис. 167

Пример 2. Разложить в тригонометрический ряд функцию $f(x)$, равную постоянной c внутри $[0, \pi]$ и равную $-c$ внутри $[-\pi, 0]$ (рис. 167). *Решение.* Имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -c \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} c \cos nx \, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -c \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} c \sin nx \, dx = \frac{4c}{\pi n}, \quad \text{если } n \text{ нечетное,}$$

$$= 0, \quad \text{если } n \text{ четное.}$$

Значит, ряд

$$\frac{4c}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

имеет суммой $+c$ внутри $(0, \pi)$ и $-c$ внутри $(-\pi, 0)$. В их концах сумма ряда определяется по закону среднего арифметического предельных значений слева и справа, ибо это — точки разрыва для разлагаемой функции.

ЗАДАЧИ

1. Разложить непрерывную функцию, показанную на графике (рис. 168).

Отв. $\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right)$.

2. Разложить непрерывную функцию, показанную на графике (рис. 169).

Отв. $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos 2x + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \dots \right)$.

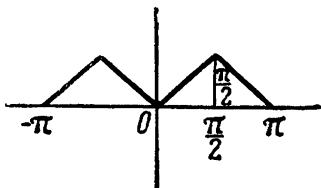


Рис. 168

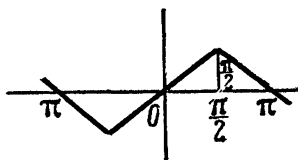


Рис. 169

3. Показать, что ряд $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$ имеет суммой $\frac{x}{2}$ внутри $[-\pi, +\pi]$.

4. Показать, что ряд $\cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 4x}{4} + \dots$ изображает $\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$ на $[-\pi, +\pi]$.

5. Показать, что

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \quad \text{внутри} \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right].$$

6. Показать, что

$$\frac{\pi x}{4} = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \quad \text{на} \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right].$$

§ 144. Гармонический анализ. Вообще исследование чисто периодического явления нередко называют *гармоническим анализом*. Таковы, например, в электротехнике явления напряжения в машинах переменного тока, в акустике — музыкальные тона, в медицине — кардиограммы, в астрономии — явления переменных звезд (Цфеиды) и т. д. Имея какое-нибудь явление $f(t)$, протекающее во времени, и которое предполагают периодическим с периодом P , обычно стараются «анализировать» это явление, «разложить» его на простейшие периодические «слагающие», за каковые обычно принимают «гар-

моники», т. е. слагающие, протекающие по закону синуса и косинуса: $a_n \cos \frac{2\pi n}{P} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{P} t$. Написанное выражение называют « n -й гармоникой», или «гармоникой n -порядка».

Когда хотят разложить предполагаемое периодическим с периодом P какое-нибудь явление $f(t)$ на простые гармоники, для этого пишут равенство

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{2\pi}{P} t + b_1 \sin \frac{2\pi}{P} t \right) + \dots + \\ + \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{P} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{P} t \right) + \dots \quad (1)$$

и определяют коэффициенты a_n , b_n этого разложения по формулам Фурье

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos \frac{2\pi}{P} n x \, dx \\ b_n &= \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin \frac{2\pi}{P} n x \, dx \end{aligned} \right\} n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Эти формулы выводятся из данных выше формул Фурье с помощью простой подстановки $x = \frac{2\pi}{P} t$.

Для того чтобы несколько упростить вычисления, руководятся тем соображением, что в случае *четной* функции $f(t)$, т. е. не изменяющей своей величины при замене t на $-t$, $f(-t) = f(t)$, в ряде Фурье должны остаться одни косинусы, а синусы должны исчезнуть, ибо при них все коэффициенты b_n будут нулями. И, наоборот, если $f(t)$ есть функция *нечетная*, т. е. такая, что $f(-t) = -f(t)$, то тогда все косинусы должны исчезнуть и остаться одни синусы.

Написанное разложение (1) годится во всяком отрезке длины периода P . Чаще всего применяют его в отрезке $[0, P]$ или в отрезке $\left[-\frac{P}{2}, +\frac{P}{2}\right]$.

Чтобы совсем освободиться от всяких вычислений, применяют (когда могут) особые аппараты, называемые *гармоническими анализаторами* и дающие прямо, при обводе иглой эмпирической периодической кривой $f(t)$, большое число коэффициентов Фурье для $f(t)$ (в лучших аппаратах до 45 гармоник). Применяют иногда немеханические методы: катодные лучи, резонанс и т. д.

§ 145. О наименьшей средней квадратичной погрешности. К коэффициентам Фурье приводит еще и другая задача. Пусть $f(x)$ есть всюду *непрерывная* периодическая функция с периодом 2π .

Обозначим через $T_n(x)$ какой-нибудь тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

оканчивающийся на члене $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Если мы заменим функцию $f(x)$ через $T_n(x)$, мы совершим некоторую ошибку. Дело сводится к ее оценке. Для этого пишут интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \quad (2)$$

и называют его величину средней квадратичной погрешностью.

Для одних тригонометрических многочленов $T_n(x)$ она велика, и тогда такие $T_n(x)$ не годятся для приближенного изображения функции $f(x)$; для других она мала. Вопрос ставится теперь об отыскании такого тригонометрического многочлена $T_n(x)$, для которого эта погрешность была бы *наименьшей*.

Для этого нужно сделать интеграл I наименьшим по величине, подобрав для этого надлежащим образом коэффициенты $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$. Этот интеграл I есть, следовательно, функция $2n+1$ действительных переменных, и мы должны искать ее *минимум* по принципу функций многих переменных, т. е. написав уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial I}{\partial b_k} = 0, \quad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ясно, что

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_k} &= - \int_0^{2\pi} 2 [f(x) - T_n(x)] \cdot \cos kx \cdot dx \\ \frac{\partial I}{\partial b_k} &= - \int_0^{2\pi} 2 [f(x) - T_n(x)] \cdot \sin kx \cdot dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Произведем указанные вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_k} &= -2 \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx + 2 \int_0^{2\pi} T_n(x) \cos kx \, dx = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx + 2\pi a_k \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = -2 \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha + 2\pi b_k.$$

В силу равенства (3), мы должны иметь:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

А это и есть *формулы Фурье*.

Таким образом, из всех *тригонометрических* многочленов $T_n(x)$ только тот делает среднюю квадратичную погрешность минимальной, у которого коэффициенты суть коэффициенты Фурье.

ГЛАВА XII

МЕТОД АКАД. С. А. ЧАПЛЫГИНА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 146. Дифференциальные неравенства С. А. Чаплыгина.
В заданном дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

мы предполагаем правую часть $f(x, y)$ непрерывной функцией в некоторой части плоскости XOY и, кроме того, удовлетворяющей в этой части плоскости какому-нибудь условию, обеспечивающему единственность интеграла. Например, мы можем просто предположить, что в этой части плоскости $\frac{\partial f}{\partial y}$

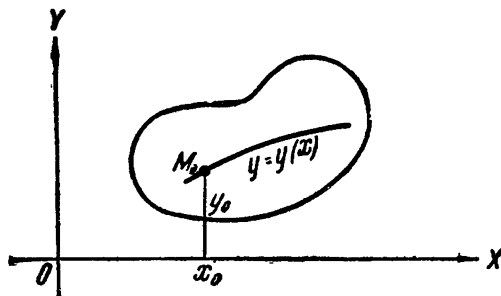


Рис. 170

имеет везде конечную величину. В этом предположении в рассматриваемой части плоскости (рис. 170) через всякую точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит заведомо единственная интегральная кривая $y = y(x)$. К сожалению, эта интегральная кривая почти

всегда нам неизвестна. Поэтому в целях практики необходимо искать другую кривую, нам уже известную, проходящую через эту же точку $M_0(x_0, y_0)$ и заведомо столь близкую к известной интегральной кривой $y = y(x)$, что практически можно брать вместо ординат интегральной кривой $y = y(x)$ ординаты этой приближенной кривой.

К отысканию приближенной кривой служит весьма замечательная и чрезвычайно простая теорема С. А. Чаплыгина, получившая название теоремы о дифференциальных неравенствах.

Вот ее формулировка.

Непрерывная кривая $y = v(x)$, вдоль которой справедливо дифференциальное неравенство $\frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0$ и которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, при $x > x_0$ лежит выше интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через ту же самую точку M_0 . Аналогично, непрерывная кривая $y = u(x)$, проходящая через M_0 , лежит ниже этой интегральной кривой, если вдоль нее справедливо дифференциальное неравенство $\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0$.

Доказательство. Прежде всего обе кривые $y(x)$ и $v(x)$ выходят из точки M_0 . Поэтому $y_0 = y(x_0) = v(x_0) = v_0$ и, следовательно,

$$f(x_0, v_0) = f(x_0, y_0) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}. \quad (2)$$

Дифференциальное же неравенство

$$\frac{dv}{dx} > f(x, v) \text{ дает } \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=x_0} > f(x_0, v_0) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}. \quad (3)$$

Это указывает на то, что наклон кривой $v(x)$ к горизонту в точке x_0 более крутой, чем соответствующий наклон кривой $y(x)$. Отсюда

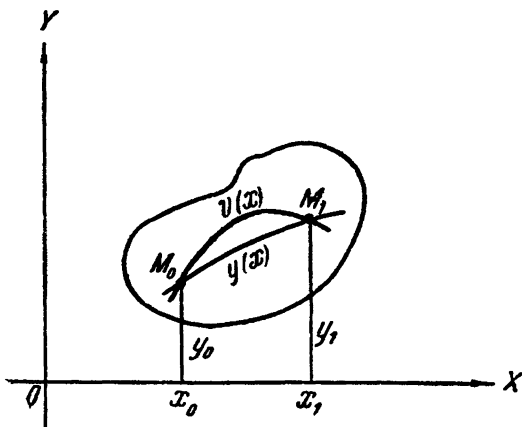


Рис. 171

следует, что кривая $v(x)$, выйдя из начальной точки M_0 , сначала лежит безусловно выше интегральной кривой $y(x)$. Сущность же теоремы состоит в том, что при дальнейшем своем течении кривая $v(x)$ никогда не может пересечь интегральной кривой $y(x)$ и, значит, поэтому вынуждена и дальше продолжать оставаться выше нее. В самом деле, если бы кривая $v(x)$ пересеклась в дальнейшем с интегральной кривой $y(x)$, то тогда имелась бы среди точек пересечения и самая первая. Пусть это будет точка $M_1(x_1, y_1)$.

Но в силу дифференциального неравенства в точке M_1 , как и раньше в точке M_0 , мы обязаны иметь неравенство $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=x_1} > \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$, показывающее, что наклон кривой $v(x)$ к горизонту в точке x_1 также более крутой, чем соответствующий наклон кривой $y(x)$. А это невозможно, потому что в этом случае кривая $v(x)$ должна была бы влево от точки M_1 лежать под интегральной кривой $y(x)$ и, значит, точка M_1 не была бы первой точкой пересечения после M_0 обеих кривых $v(x)$ и $y(x)$ (рис. 171).

Итак, необходимо имеем обыкновенное неравенство $v(x) > y(x)$ до тех пор, пока имеется дифференциальное неравенство $\frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0$.

Аналогично, необходимо имеем обыкновенное неравенство $u(x) < y(x)$, если имеется дифференциальное неравенство $\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0$, причем кривая $u(x)$ проведена через начальную точку M_0 . ч. т. д.

§ 147. Метод С. А. Чаплыгина. Когда дается дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

его, вообще говоря, проинтегрировать нельзя, кроме очень редких случаев. Поэтому, когда наудачу подставляют в уравнение (1) вместо неизвестной нам функции $y(x)$ какую-нибудь случайно взятую функцию $z(x)$, то всегда будем иметь дифференциальное неравенство

$$\frac{dz}{dx} - f(x, z) \leq 0.$$

Важность теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах заключается в том, что по самому знаку дифференциального неравенства мы можем с уверенностью судить о том, по какую сторону неизвестной нам интегральной кривой $y(x)$ ляжет взятая нами кривая $z(x)$; если знак неравенства $>$, то $z(x)$ лежит выше $y(x)$; если же знак неравенства $<$, то $z(x)$ лежит ниже $y(x)$ (рис. 172).

Имея пару $[v(x), u(x)]$ кривых, проходящих через начальную точку M_0 , из которых первая удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0, \quad (2)$$

а вторая — дифференциальному неравенству

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0, \quad (3)$$

мы теперь знаем, что первая кривая $v(x)$ лежит строго выше второй кривой $u(x)$ (кроме начальной точки M_0) и что неизвестная нам

интегральная кривая $y(x)$ заведомо должна содержаться между ними (рис. 173).

Такая пара кривых, удовлетворяющая дифференциальным неравенствам, называется начальной парой и обозначается сокращенно

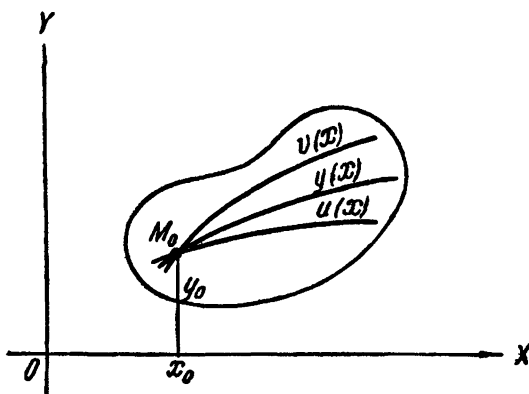


Рис. 172

щенно через $[u, v]$ ввиду того, что из нее выводятся по определенному правилу — одна по одной, каждая следующая из предыдущей — дальнейшие пары:

$$\begin{aligned} &[u_1, v_1], [u_2, v_2], [u_3, v_3], \dots, \\ &[u_n, v_n], \dots \end{aligned} \quad (4)$$

также удовлетворяющие дифференциальным неравенствам:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dx} - f(x, u_n) &< 0, \\ \frac{dv_n}{dx} - f(x, u_n) &> 0 \end{aligned}$$

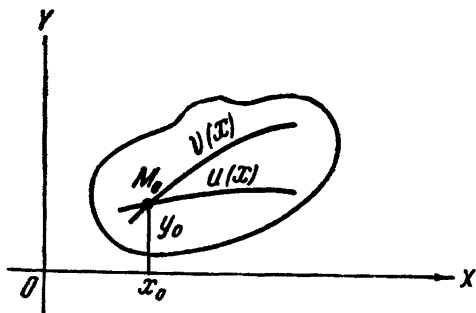


Рис. 173

и все теснее и теснее охватывающие искомую интегральную кривую $y(x)$ (рис. 174).

Таким образом тратить силы на поиски всех дальнейших пар $[u_n, v_n]$ нет необходимости, потому что все они, одна за другой, получаются по определенному правилу. Но, к сожалению, для поисков начальной пары $[u, v]$ нет никаких правил и поэтому ее приходится получать из каких-нибудь сторонних соображений, геометрических или алгебраических.

Ясно, что имеются начальные пары $[u, v]$ с кривыми $v(x)$ и $u(x)$, идущими столь же далеко, как простирается сама интегральная кривая $y(x)$. Это следует из того, что для всякого положительного ε , $\varepsilon > 0$ два дифференциальные уравнения:

$$\frac{dv}{dx} = f(x, v) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx} = f(x, u) - \varepsilon \quad (5)$$

дают верхнюю $v(x)$ и нижнюю $u(x)$ кривые начальной пары $[u, v]$, ибо имеем $\frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0$ и $\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0$.

К сожалению, дифференциальные уравнения (4) интегрировать столь же трудно, как и само первоначальное уравнение (1).

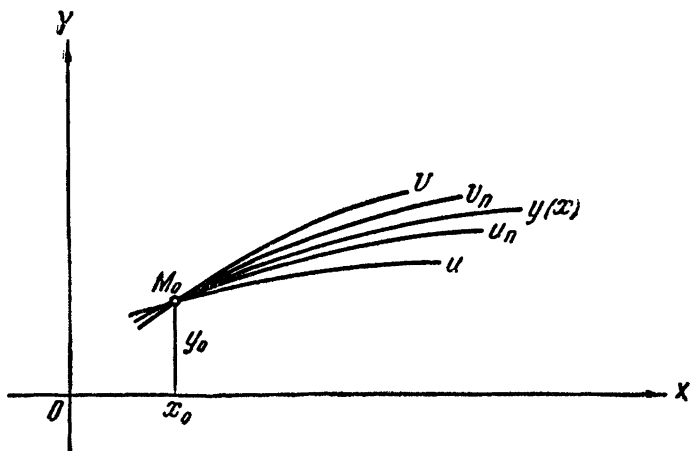


Рис. 174

Здесь полезно заметить следующее: если нам удалось отыскать две непрерывные функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, между которыми заключена данная непрерывная функция $f(x, y)$, т. е. если

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y) \quad (6)$$

и если эти две функции f_1 и f_2 таковы, что оба дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y) \quad (7)$$

легко интегрируются, то их интегральные кривые $U(x)$ и $V(x)$

$$\frac{dU}{dx} = f_1(x, U), \quad \frac{dV}{dx} = f_2(x, V), \quad (8)$$

На рисунках 175 и 177 изображены оба эти случая: на первом — случай положительной $\frac{d^2f}{dy^2}$, на втором — случай отрицательной $\frac{d^2f}{dy^2}$.

Имея n -ю пару кривых $[u_n(x), v_n(x)]$ уже построенной и удовлетворяющей дифференциальным неравенствам:

$$\frac{du_n}{dx} - f(x, u_n) < 0$$

и

$$\frac{dv_n}{dx} - f(x, v_n) > 0, \quad (11)$$

мы замечаем, что при заданном x и переменном y , изменяющемся в границах $u_n(x) \leq y \leq v_n(x)$, дуга AB кривой $\zeta = f(x, y)$ лежит между хордой AB и касательной AT (или BT), проведенной в конце A (или B) к этой дуге. На рис. 176 и 178 секущая плоскость, раньше (т. е. на рис. 175 и 177) проводившаяся в пространстве через точку x перпендикулярно к оси OX , теперь положена на самую

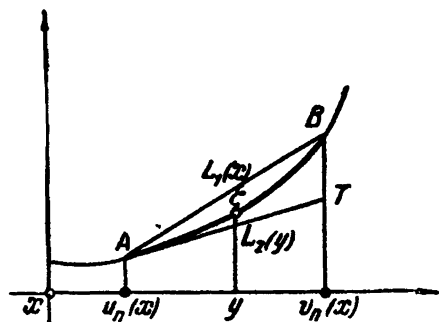


Рис. 176

плоскость, раньше (т. е. на рис. 175 и 177) проводившаяся в пространстве через точку x перпендикулярно к оси OX , теперь положена на самую

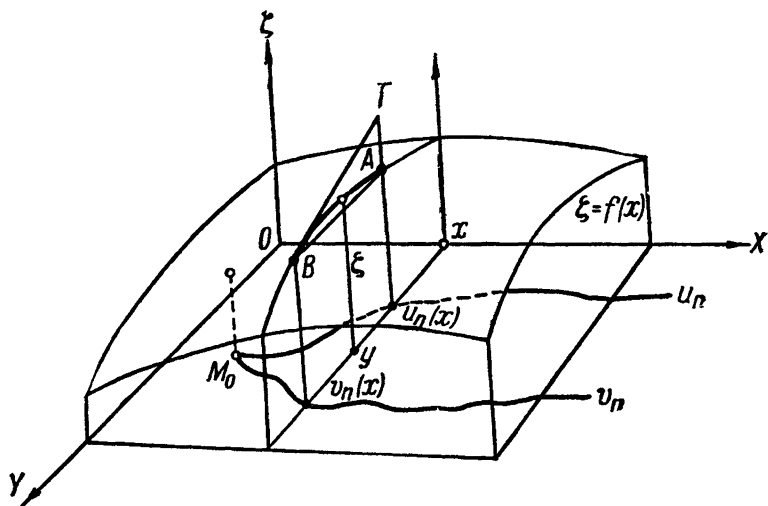


Рис. 177

плоскость чертежа. Из этих рисунков 176 и 178 — нам сразу понятно, что численные значения функции $\zeta = f(x, y)$, при любом заданном x и при переменном y , изменяющемся в границах $u_n(x) \leq y \leq v_n(x)$.

заключены между двумя линейными от буквы y функциями $L_1(y)$ и $L_2(y)$, где

$$L_1(y) = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n} (y - u_n) + f(x, u_n) \quad (12)$$

и

$$L_2(y) = f'_y(x, u_n)(y - u_n) + f(x, u_n), \quad (13)$$

ибо $L_1(y)$ выражает ординату хорды AB , восстановленную в точке y , а $L_2(y)$ выражает ординату касательной AT , восстановленную в той же точке y .

Если касательная берется в точке B , то функцию $L_2(y)$ следует заменить функцией

$$L_2^*(y) = f'_y(x, v_n)(y - v_n) + f(x, v_n). \quad (13^*)$$

Отсюда мы заключаем, что, если напишем два линейные по букве y дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx} = L_1(y) \text{ и } \frac{dy}{dx} = L_2(y), \quad (14)$$

или соответственно

$$\frac{dy}{dx} = L_1(y) \text{ и } \frac{dy}{dx} = L_2^*(y), \quad (14^*)$$

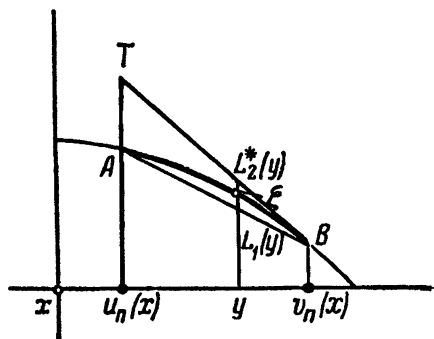


Рис. 178

то искомая интегральная кривая $y(x)$ дифференциального уравнения (1) содержится между обеими интегральными кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно первого и второго дифференциальных уравнений (14) или (14*), проведенными через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Значит, если мы обозначим через $v_{n+1}(x)$ верхнюю из этих двух интегральных кривых $y_1(x)$ и $y_2(x)$, а через $u_{n+1}(x)$ — нижнюю, то будем иметь алгебраические неравенства:

$$u_{n+1}(x) < y(x) < v_{n+1}(x), \quad (15)$$

указывающие на то, что мы уже имеем построенной следующую пару кривых $[u_{n+1}(x), v_{n+1}(x)]$, причем это построение осуществлено через интегрирование только двух линейных дифференциальных уравнений (14) или (14*), т. е. является трудом, в принципе не представляющим никакого теоретического препятствия, ибо все делается только через квадратуры: мы ведь знаем, что интегрирование линейного уравнения первого порядка требует только выполнения квадратур.

Чтобы доказать, что новая пара кривых $[u_{n+1}(x), v_{n+1}(x)]$, только что выведенная из прежней (т. е. предыдущей) пары кривых $[u_n(x), v_n(x)]$, действительно лежит внутри нее, нам достаточно просто прибегнуть к теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.

Здесь нам нужно разобрать только два случая: во-первых, когда $\frac{d^2 f}{dy^2} > 0$, и, во-вторых, когда $\frac{d^2 f}{dy^2} < 0$.

В первом случае определим функции $v_{n+1}(x)$ и $u_{n+1}(x)$ из уравнений (14). Мы имеем рис. 176, на котором сразу видно, что $y_1(x) > y_2(x)$ и, значит, $v_{n+1}(x) = y_1(x)$ и $u_{n+1}(x) = y_2(x)$. Итак, имеем:

$$\frac{dv_{n+1}}{dx} - L_1(v_{n+1}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{du_{n+1}}{dx} - L_2(u_{n+1}) = 0.$$

Подставим теперь в эти равенства вместо v_{n+1} функцию v_n , а вместо u_{n+1} — функцию u_n . Мы получим, на основании предположенных неравенств (11), дифференциальные неравенства:

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \frac{dv_n}{dx} - L_1(v_n) &= \frac{dv_n}{dx} - f(x, v_n) > 0 \\ \frac{du_n}{dx} - L_2(u_n) &= \frac{du_n}{dx} - f(x, u_n) < 0, \end{aligned}$$

обнаруживающие, что $v_n(x) > v_{n+1}(x)$ и $u_n(x) < u_{n+1}(x)$, т. е. что выведенная пара $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ действительно охватывается предыдущей парой $[u_n, v_n]$.

Во втором случае определим функции $v_{n+1}(x)$ и $u_{n+1}(x)$ из уравнений (14*). Мы имеем рис. 177, из которого ясно, что $y_1(x) < y_2(x)$ и, значит:

$$v_{n+1}(x) = y_2(x) \quad \text{и} \quad u_{n+1}(x) = y_1(x).$$

$$\text{Итак, имеем:} \quad \frac{dv_{n+1}}{dx} - L_2^*(v_{n+1}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{du_{n+1}}{dx} - L_1(u_{n+1}) = 0.$$

Подставим теперь в эти равенства вместо v_{n+1} функцию $v_n(x)$, а вместо u_{n+1} — функцию $u_n(x)$. Мы получим:

$$\begin{aligned} \text{и} \quad \frac{dv_n}{dx} - L_2^*(v_n) &= \frac{dv_n}{dx} - f(x, v_n) \\ \frac{du_n}{dx} - L_1(u_n) &= \frac{du_n}{dx} - f(x, u_n). \end{aligned}$$

Первое выражение положительно, а второе отрицательно в силу неравенств (11).

Таким образом, и в этом случае выведенная пара $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ охватывается предыдущей парой $[u_n, v_n]$.

В заключение мы устанавливаем, что нигде не останавливающийся процесс составления и интегрирования линейных уравнений 1-го порядка, указанный С. А. Чаплыгиным, разворачивает безграничную последовательность пар кривых

$$[u_1, v_1], [u_2, v_2], [u_3, v_3], \dots, [u_n, v_n], \dots$$

проходящих через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, содержащих каждая все следующие за ней и все теснее и теснее охватывающих искомую интегральную кривую $y(x)$.

Остается узнать, какова быстрота, т. е. сила сходимости этого процесса.

§ 149. Быстрота сходимости процесса С. А. Чаплыгина. Для оценки $n+1$ -го приближения по методу С. А. Чаплыгина, т. е. для оценки величины разности $v_{n+1}(x) - u_{n+1}(x) = \delta_{n+1}(x)$, следует обратиться к дифференциальным уравнениям (14), потому что одно из них дает верхнюю функцию $v_{n+1}(x)$ а другое — нижнюю функцию $u_{n+1}(x)$. Приняв во внимание теорему о среднем Лагранжа, мы переписываем линейную функцию $L_1(y)$ в более удобном виде (для уравнений (14*) рассуждения аналогичные):

$$L_1(y) = f'_y(x, z)(y - u_n) + f(x, u_n),$$

где z есть число, заключенное между числами u_n и v_n , $u_n \leq z \leq v_n$. Но так как $f'_y(x, z) = f'_y(x, u_n) + (z - u_n)f''_{y^2}(x, \zeta)$, где ζ — число, заключенное между числами u_n и z , т. е. в свою очередь содержащееся между u_n и v_n , $u_n \leq \zeta \leq v_n$, то имеем:

$$\begin{aligned} L_1(y) &= f'_y(x, u_n) \cdot (y - u_n) + f(x, u_n) + \\ &+ f''_{y^2}(x, \zeta) \cdot (z - u_n)(y - u_n). \end{aligned} \quad (12^*)$$

Вычитая теперь из того дифференциального уравнения (14), которое дает v_{n+1} , другое, дающее u_{n+1} , мы имеем, очевидно,

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx} = f'_y(x, u_n) \cdot \delta_{n+1}(x) \pm f''_{y^2}(x, \zeta) \cdot (z - u_n)(x - u_n), \quad (16)$$

где берется верхний знак $+$, если из первого дифференциального уравнения (14) вычитается второе, и где берется нижний знак $-$, если, наоборот, из второго уравнения (14) вычитается первое.

Обозначая через λ и через μ два положительные числа, превышающие соответственно абсолютные величины $|f'_y(x, y)|$ и $|f''_{yy}(x, y)|$ в рассматриваемой части плоскости XOY ,

$$|f'_y(x, y)| < \lambda, \quad |f''_{yy}(x, y)| < \mu$$

и приняв во внимание, что числа y и z заключены между числами u_n и v_n , а также, что $\delta_{n+1}(x)$ есть величина положительная, мы видим, что равенство (16) дает неравенство

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx} < \lambda\delta_{n+1}(x) + \mu\delta_n^2(x), \quad (17)$$

либо имеем, очевидно,

$$|z - u_n| < \delta_n(x) \text{ и } |y - u_n| < \delta_n(x).$$

Если мы теперь, вместо дифференциального неравенства (17) для функции $\delta_{n+1}(x)$, рассмотрим дифференциальное линейное уравнение относительно некоторой, пока нам еще неизвестной, функции $\Delta_{n+1}(x)$, равной нулю для $x = x_0$, $\Delta_{n+1}(x_0) = 0$,

$$\frac{d\Delta_{n+1}(x)}{dx} = \lambda\Delta_{n+1}(x) + \mu\Delta_n^2(x), \quad (18)$$

то в силу теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах мы заключаем, что должны иметь алгебраическое неравенство

$$\delta_{n+1}(x) < \Delta_{n+1}(x), \quad (19)$$

если справедливо алгебраическое неравенство

$$\delta_n(x) < \Delta_n(x). \quad (20)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно взять вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega(x)}{dx} - \lambda\omega(x) - \mu\delta_n^2(x) = 0 \quad (21)$$

с начальным условием $\omega(x_0) = 0$.

Так как замена в нем функции $\omega(x)$ функцией $\delta_{n+1}(x)$ в силу (17) дает дифференциальное неравенство:

$$\frac{d\delta_{n+1}(x)}{dx} - \lambda\delta_{n+1}(x) - \mu\delta_n^2(x) < 0,$$

то мы должны иметь всюду алгебраическое неравенство:

$$\delta_{n+1}(x) < \omega(x). \quad (22)$$

С другой стороны, замена в дифференциальном уравнении (21) интеграла $\omega(x)$ функцией $\Delta_{n+1}(x)$ дает положительный результат, ибо имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_{n+1}(x)}{dx} - \lambda\Delta_{n+1}(x) - \mu\delta_n^2(x) &= \frac{d\Delta_{n+1}(x)}{dx} - \lambda\Delta_{n+1}(x) - \mu\Delta_n^2(x) + \\ &+ \mu\Delta_n^2(x) - \mu\delta_n^2(x) = \mu[\Delta_n^2(x) - \delta_n^2(x)] = \\ &= \mu[\Delta_n(x) + \delta_n(x)] \cdot [\Delta_n(x) - \delta_n(x)] > 0. \end{aligned}$$

Значит, мы должны иметь алгебраическое неравенство:

$$\omega(x) < \Delta_{n+1}(x). \quad (23)$$

Сопоставляя неравенства (22) и (23), мы окончательно получаем:

$$\delta_{n+1}(x) < \Delta_{n+1}(x).$$

Таким образом, чтобы оценить быстроту сходимости процесса С. А. Чаплыгина, достаточно проинтегрировать линейное уравнение (18), определяя интегральную функцию $\Delta_{n+1}(x)$ начальным условием $\Delta_{n+1}(x_0) = 0$ и рассматривая предыдущую функцию $\Delta_n(x)$ как уже известную. Это интегрирование (§ 106) нам дает x

$$\Delta_{n+1}(x) = e^{\lambda x} \int_{x_0}^x \mu \Delta_n^2(t) e^{-\lambda t} dt$$

или

$$\Delta_{n+1}(x) = \mu \int_{x_0}^x e^{\lambda(x-t)} \Delta_n^2(t) dt. \quad (24)$$

Мы предполагаем, что приближенное интегрирование рассматриваемого дифференциального уравнения (1) мы проводим на заранее нам заданном отрезке $[x_0 \leq x \leq x_1]$.

Длина этого отрезка поэтому является для нас известной нам постоянной величиной, которую мы обозначим через L , $L > 0$, т. е. $x_1 - x_0 = L$. Другими такими же известными нам положительными постоянными величинами являются рассмотренные нами выше постоянные λ и μ , $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Эти три постоянные L , λ и μ являются для нас основными.

Заметив это, введем теперь для удобства три положительные постоянные K , C и ε , не основные, но вспомогательные,

потому что они выражаются через основные. Именно, мы полагаем:

$$\left. \begin{aligned} K &= \mu e^{\lambda L}; \\ C &= \frac{1}{2KL}; \\ \varepsilon &= \frac{1}{2L}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Так как в формуле (24) буквы x и t обозначают числа, содержащиеся в отрезке $[x_0, x_1]$, то разность $x - t$, будучи положительной, не превосходит его длины L . Поэтому, равенство (24) дает неравенство

$$\Delta_{n+1}(x) < K \int_{x_0}^x \Delta_n^2(t) dt. \quad (26)$$

Предположим теперь, что для какого-нибудь целого неотрицательного числа n справедливо неравенство

$$\Delta_n(x) < C [\varepsilon(x - x_0)]^{2n-1} \quad (27)$$

для всех x , содержащихся в отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда имеем очевидное неравенство

$$\Delta_n^2(t) < C^2 [\varepsilon(t - x_0)]^{2^{n+1}-2},$$

благодаря которому неравенство (26) переписывается в виде

$$\Delta_{n+1}(x) < K \int_{x_0}^x C^2 [\varepsilon(t - x_0)]^{2^{n+1}-2} dt. \quad (28)$$

После взятия определенного интеграла правая часть неравенства (28) становится равной

$$\frac{KC^2 \varepsilon^{2^{n+1}-2} (x - x_0)^{2^{n+1}-1}}{2^{n+1}-1} = \frac{KC^2 [\varepsilon(x - x_0)]^{2^{n+1}-1}}{\varepsilon(2^{n+1}-1)}.$$

Так как в силу второй и третьей формулы (25) мы имеем, очевидно, $KC = \varepsilon$ и так как число $2^{n+1} - 1$ для всякого n есть целое и положительное, то неравенство (28) переписывается просто в виде

$$\Delta_{n+1}(x) < C [\varepsilon(x - x_0)]^{2^{n+1}-1}. \quad (29)$$

Отсюда мы выводим важное заключение.

Формула (27), которую мы допустили быть верной для значка n , оказывается необходимо верной и

тогда, когда значок n увеличиваем на единицу; поэтому она справедлива и для всех дальнейших величин значка n .

В частности, достаточно выбрать для отрезка $[x_0, x_1]$ начальную пару $[u(x), v(x)]$, удовлетворяющую дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0, \quad \frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0,$$

такой, чтобы начальное приближение, осуществляемое этой парой

$$\delta(x) = \Delta(x) = v(x) - u(x),$$

было меньше постоянной C :

$$\delta(x) < C$$

на всем отрезке $[x_0, x_1]$, как все дальнейшие приближения $\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_n(x), \dots$, разворачиваемые по методу С. А. Чаплыгина, необходимо удовлетворяют везде на этом отрезке неравенству

$$\delta_n(x) < \Delta_n(x) < C [\varepsilon(x - x_0)]^{2^n - 1}. \quad (30)$$

Чтобы оценить быстроту сходимости этого процесса, достаточно заметить, что на отрезке $[x_0, x_1]$ мы имеем $0 \leq x - x_0 \leq L$ и что по формуле (25) имеем $\varepsilon = \frac{1}{2L}$. Следовательно,

$$\delta_n(x) < C \left[\frac{1}{2} \right]^{2^n - 1} = \frac{2C}{2^{2^n}}. \quad (31)$$

Необыкновенная сила сходимости этого процесса становится бросающейся в глаза, когда мы сравним ее со сходимостью процессов, фигурирующих в классическом анализе: там быстрота сходимости считается счастливо достигнутой, когда она типа геометрической прогрессии, т. е. когда в знаменателе стоят числа 2^{2^n} ; она считается перевыполняющей все требования, могущие к ней быть предъявленными, когда в знаменателе стоит факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Но в рассматриваемом процессе в знаменателе стоят числа Ферма 2^{2^n} , рост которых неизмеримо превосходит даже рост факториала $n!$ В этом отношении метод С. А. Чаплыгина является собственно не имеющим precedентов.

Без сомнения можно получить еще сильнее сходящиеся процессы, хотя бы оставляя нетронутыми лишь некоторые члены какого-нибудь сходящегося ряда, расставленные на надлежащих местах, и заменяя все прочие нулями. Но в данном случае мы имеем дело с геометром, не имевшим обыкновения составлять искусственные примеры для подтверждения того или другого мнения: он обычно удовлетворялся теми процессами, которые естественным образом вытекали из хода его практических изысканий.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава I. Интегрирование. Правила непосредственного интегрирования

(1) Интегрирование. (2) Многозначность действия интегрирования: прибавочное, произвольное, постоянное. Неопределенный интеграл. (3) Определенный интеграл. (4) Основная теорема интегрального исчисления о вычислении определенного интеграла. (5) Характер основного действия интегрального исчисления. Обозначения определенного и неопределенного интегралов. (6) Взаимная обратность знаков: дифференциала d и неопределенного интеграла \int . (7) О вычисляемости и невычисляемости неопределенных интегралов. (8) Таблица основных интегралов и непосредственное интегрирование. (9) Формулы I, II и III. (10) Формулы IV и V. (11) Формулы VI и VII. (12) Формулы VIII—XV. (13) Формулы XVI—XIX. (14) Формулы XX и XXI. (15) Тригонометрические дифференциалы. (16) Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{a^2 - x^2}$ или $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ при помощи тригонометрических подстановок. (17 а) О множественности ответов при интегрировании. (18) Интегрирование по частям. (19) Пояснение

3

Глава II. Постоянная интегрирования

(20) Определение постоянной интегрирования из начальных условий. (21) Геометрическое значение постоянной интегрирования. (22) Физическое значение постоянной интегрирования

60

Глава III. Определенный интеграл

(23) Понятие определенного интеграла. (24) Теоретическое вычисление определенного интеграла. (25) Фактическое вычисление определенного интеграла. (26) Обозначение определенного интеграла. (27) Основная формула Лейбница — Ньютона и условие ее применимости. (28) Взаимоотношение определенного и неопределенного интегралов. (29) Переменное интегрирования в определенном и в неопределенном интегралах. (30) Перестановка пределов интегрирования. (31) Разбиение отрезка интегрирования. (32) Два простейшие свойства определенных интегралов. (33) Определенное интегрирование по частям. (34) Определенное интегрирование подстановкой. (35) Теорема о среднем. (36) Определенный интеграл как площадь. (37) Площадь кривой, заданной уравнениями в параметрической форме. (38) Задача приближенного интегрирования. (39) Правило трапеций. (40) Правило Симпсона (параболическая формула). (41) Интеграл с бесконечными пределами. (42) Интеграл от функции прерывной (уходящей в бесконечность).

66

Глава IV. Интегрирование как процесс суммирования. Приложения интегрального исчисления

(43) Введение. (44) Общая схема применения интегрального исчисления. (45) Площади плоских кривых в прямоугольных координатах.

| | |
|--|----|
| (46) Упрощение в выводе формул. (47) Смысл отрицательного знака у площади. (48) Площади плоских кривых в полярных координатах. (49) Объемы тел вращения. (50) Длина кривой. (51) Длина плоской кривой в прямоугольных координатах. (52) Длина плоской кривой в полярных координатах. (53) Поверхность тела вращения. (54) Тела с известными поперечными параллельными сечениями. (55) О применении интегрального исчисления в естествознании. (56) Центр тяжести. (57) Давление жидкости. Работа | 95 |
|--|----|

Глава V. Формальное интегрирование различными приемами

| | |
|--|-----|
| (58) Введение. (59) Интегрирование рациональных дробей. (60) Интегрирование подстановкой нового переменного; рационализация. (61) Дифференциальный бином. (62) Преобразование тригонометрических дифференциалов. (63) Разные подстановки | 140 |
|--|-----|

Глава VI. Ряды

| | |
|--|-----|
| (64) Бесконечные последовательности. (65) Признаки существования предела последовательности. (66) Ряды. (67) Необходимый признак сходимости. (68) Достаточные признаки сходимости. Сравнение рядов. (69) Признак сходимости Д'Аламбера. (70) Ряды с чередующимися знаками. (71) Абсолютная сходимость. (72) Интегральный признак Коши. (73) Действия над рядами. (74) Остаток ряда. (75) Общий обзор. (76) Ряды функций. (77) Равномерная сходимость. (78) Признак для равномерной сходимости. (79) Свойства равномерно сходящихся рядов. (80) Степенные ряды. (81) Сумма степенного ряда. (82) Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. (83) Бесконечный ряд Маклорена. (84) Сопоставление бесконечного ряда Маклорена с конечной формулой Маклорена. (85) Биномиальный ряд. (86) Логарифмические ряды. (87) Разложение аркус-тангенса. (88) Разложение аркус-синуса. (89) Действия над степенными рядами. (90) Ряды Тейлора | 157 |
|--|-----|

Глава VII. Комплексные числа, переменные, функции

| | |
|---|-----|
| (91) Арифметика и алгебра комплексных чисел. (92) Геометрическое изображение комплексных величин. (93) Комплексное переменное. (94) Перенос теории численных рядов на комплексные числа. (95) Понятие функции комплексного переменного. (96) Непрерывность функции комплексного переменного. (97) Производная и монотонность. (98) Сохранение формул дифференциального исчисления. (99) Степенные ряды. (100) Ряд Тейлора и его круг сходимости. (101) Показательные и тригонометрические функции с комплексным переменным. (102) Гиперболические функции | 218 |
|---|-----|

Глава VIII. Дифференциальные уравнения

| | |
|--|-----|
| (103) Дифференциальные уравнения. Их порядок и степень. (104) Решение дифференциальных уравнений. Постоянные интегрирования. (105) Проверка решений дифференциальных уравнений. (106) Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. (107) Два специальных типа дифференциальных уравнений высшего порядка. (108) Случаи понижения порядка. (109) Форма общего интеграла линейного однородного уравнения второго порядка. (110) Уравнения с правой частью. (111) Метод Лагранжа изменения постоянных. (112) Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. (113) Отыскание решения y^* в общем случае. (114) Приложения к задачам механики. (115) Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. (116) Метод Лагранжа изменения постоянных | 256 |
|--|-----|

Глава IX. Кратные интегралы

(117) Двухмерная интегральная сумма. (118) Геометрический смысл двухмерной интегральной суммы. (119) Двойной (определенный) интеграл. (120) Геометрический смысл двойного интеграла. (121) Вычисление двойного интеграла. Случай прямоугольной области. (122) Вычисление двойного интеграла. Общий случай области, ограниченной криволинейным контуром. (123) Двойной интеграл в полярных координатах. (124) Объем цилиндрического тела. (125) Площади, ограниченные плоскими кривыми. (126) Центр тяжести площади плоской фигуры. (127) Моменты инерции площади плоской фигуры. (128) Общий метод вычисления площади поверхности. (129) Нахождение объемов посредством тройного интегрирования 312

Глава X. Криволинейный интеграл

(130) Обозначение криволинейного интеграла. (131) Происхождение криволинейного интеграла. (132) Вычисление криволинейного интеграла. (133) Случай, когда криволинейный интеграл $\int P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования, но зависит только от положения конечных точек. (134) Аналитический признак полного дифференциала. (135) Зависимость криволинейного интеграла от пути. Работа силы. (136) Формула Остроградского. (137) Дифференциальное уравнение, левая часть которого есть полный дифференциал. (138) Интегрирующий множитель 351

Глава XI. Ряды Фурье

(139) Тригонометрические ряды. (140) Формулы Фурье. (141) Предварительные леммы. (142) Выражение суммы $n+1$ первых членов ряда Фурье. (143) Сходимость ряда Фурье. (144) Гармонический анализ. (145) О наименьшей средней квадратичной погрешности 379

Глава XII. Метод акад. С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования

(146) Дифференциальные неравенства С. А. Чаплыгина. (147) Метод С. А. Чаплыгина. (148) Безграничное приближение. (149) Быстрота сходимости процесса С. А. Чаплыгина 398

Лузин Николай Николаевич
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *С. И. Новосёлов*
Редактор издательства *Д. А. Тальский*
Технический редактор *В. А. Мурашова*

Сдано в набор 27/II 1960 г.
Подписано к печати 30/X 1961 г.
Бумага 60×90¹/₁₆. 26 печ. л. 30,4 уч.-изд. л.
Тираж 50 000 экз. Цена 1 руб. Заказ 2933.

Государственное издательство «Высшая школа»
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20.

Печать с матриц тип. № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.